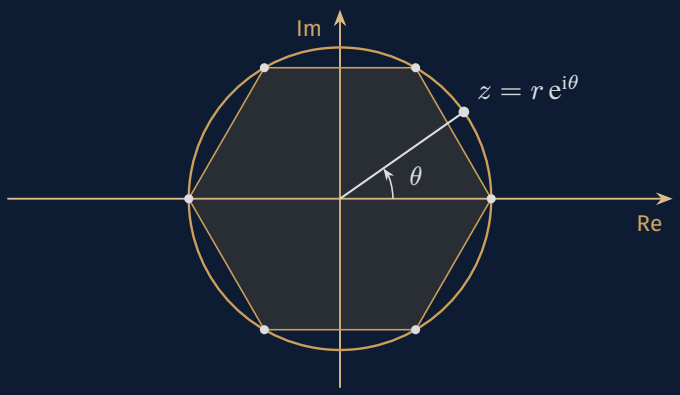
Introduction aux nombres complexes et polynômes

Notes des cours MAT-1900 et MAT-1110



Jérôme Soucy

UNIVERSITÉ LAVAL • DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

23 NOVEMBRE 2026

Au sujet de ces notes

Ces notes présentent les notions de base concernant les nombres complexes. Elles sont destinées aux étudiantes et étudiants des cours *MAT-1900 : Mathématiques de l'ingénieur 1* et *MAT-1110 : Calcul des fonctions de plusieurs variables* de l'Université Laval. Le chapitre 1 rappelle différents contextes où l'introduction de nouveaux types de nombres s'est avérée nécessaire, ainsi que certaines propriétés des opérations élémentaires que sont l'addition et la multiplication. Les chapitres 2 à 4 traitent de la forme cartésienne des nombres complexes (opérations, module, conjugué, lieux géométriques) ; les chapitres 6 à 9, de leurs formes polaire et exponentielle, des formules d'Euler et de De Moivre et des racines n-ièmes. Les chapitres 5 et 10 rassemblent des exercices ; leurs solutions sont regroupées à la fin du document.

Avis d'utilisation de l'IA. Des outils d'IA (principalement Claude Opus 5.5) ont été utilisés pour convertir ce document au format Quarto, pour adapter les figures TikZ et pour corriger certaines coquilles. Le contenu a ensuite été vérifié et validé par l'auteur.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à `jerome.soucy@mat.ulaval.ca`.

Ressource éducative libre — Licence CC BY-NC-SA 4.0

© 2026 Jérôme Soucy. Ce document est une ressource éducative libre, mise à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0). Vous pouvez le copier, le redistribuer, l'adapter, le traduire et le réutiliser en tout ou en partie, à condition de citer l'auteur original, d'indiquer si des modifications ont été faites, de ne pas en faire un usage commercial et de diffuser toute version modifiée sous la même licence. Les sources sont disponibles sur GitHub.

Pour citer ce document : Jérôme Soucy, *Introduction aux nombres complexes et polynômes*, notes des cours MAT-1900 et MAT-1110, Université Laval, 2026.

Table des matières

1 Arithmétique élémentaire **3**
- 1.1 Les nombres en général . . . 3
- 1.2 Deux opérations fondamentales . . . 3
- 1.3 Associativité . . . 4
- 1.4 Commutativité . . . 4
- 1.5 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition . . . 5
- 1.6 Stabilité d'un ensemble par rapport à une opération . . . 5

2 Définition des nombres complexes **7**
- 2.1 Somme de deux nombres complexes . . . 8
- 2.2 Parties réelle et imaginaire . . . 9
- 2.3 Produit de deux nombres complexes . . . 10
- 2.4 Inverse . . . 12
- 2.5 Quotient . . . 13

3 Module et conjugué **15**
- 3.1 Le conjugué . . . 15
  - 3.1.1 Fonctions valeur absolue et racine carrée . . . 16
- 3.2 Module . . . 18
- 3.3 Propriétés du conjugué et du module . . . 19

4 Lieux géométriques dans le plan complexe **24**

5 Exercices — série 1 **28**

6 Forme polaire **30**

7 La fonction exponentielle complexe **32**

8 Les formules d'Euler et celle de De Moivre **36**

9 Racines n-ièmes **38**
- 9.1 Racines carrées . . . 38
- 9.2 Racines n-ièmes . . . 39

10 Exercices — série 2 **43**

Annexes **45**

Solutions des exercices **45**

Bibliographie **57**

1 Arithmétique élémentaire

Avant d'introduire les nombres complexes, il serait pertinent de revoir quelques propriétés de ce que nous avons coutume d'appeler nombre, et de faire l'inventaire des objets mathématiques qui appartiennent à cette catégorie.

1.1 Les nombres en général

Les nombres — qu'on les qualifie de naturels, entiers, rationnels, réels ou complexes — sont des objets mathématiques qui, une fois déshabillés des attributs que nous leur prêtons, se réduisent à n'être que des ensembles. Au moyen d'efforts considérables dans certains cas, tout nombre x peut s'écrire de manière à ce que $x = \{...\}$, où les trois points sont eux-mêmes des ensembles, des ensembles d'ensembles, etc. Si ces définitions — qu'on pourrait qualifier d'ensemblistes — des nombres sont d'une importance capitale, tous conviendront que nos raisonnements quotidiens qui les font intervenir portent davantage sur leurs caractéristiques que sur leur définition. Ainsi, en pensant au nombre 2, l'image de deux points, semblables à ceux qu'on retrouve sur un dé à six faces, se présentera à notre esprit plus rapidement que la définition du nombre 2 donnée par John von Neumann (voir [Neu23]) voulant que $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, où $\varnothing$ désigne l'ensemble ne comportant aucun élément (l'ensemble vide).

1.2 Deux opérations fondamentales

Dès le début du primaire, on apprend à additionner et à multiplier des nombres. Ils sont d'abord naturels, puis lorsque l'élève termine ses études primaires, il est réputé en mesure d'effectuer ces opérations avec des nombres appartenant à des ensembles plus vastes, comme le sont les entiers et les nombres fractionnaires[1]. Dans tous les cas, certaines propriétés, qu'on pourrait qualifier de « lois de l'arithmétique », sont vérifiées. En voici quelques-unes :

1. l'addition et la multiplication sont des opérations associatives ;
2. l'addition et la multiplication sont des opérations commutatives ;
3. la multiplication est distributive sur l'addition ;
4. un ensemble de nombres E est stable pour l'addition et la multiplication.

Voici ce qu'on entend par ces lois.

1. Éventuellement appelés nombres rationnels.

1.3 Associativité

Le fait qu'écrire $1 + 2 + 5$ ne pose aucune ambiguïté découle du fait que l'opération d'addition est associative. Qu'on calcule $(1 + 2) + 5$ ou $1 + (2 + 5)$, le résultat sera le même. De la même manière,

$$3 \times 4 \times 5 = 3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5.$$

L'associativité, c'est la possibilité de déplacer une paire de parenthèses sans modifier le résultat. Bien que l'addition et la multiplication soient des opérations associatives, le déplacement de parenthèses n'est pas forcément valable si ces deux opérations sont présentes dans un même calcul. Par exemple, pour calculer $1 + 2 \times 5$, on ne peut pas calculer indifféremment l'une ou l'autre des expressions $(1 + 2) \times 5$ et $1 + (2 \times 5)$. On *convient* que l'expression $1 + 2 \times 5$ correspond à $1 + (2 \times 5)$. Il s'agit ainsi d'une convention d'écriture plutôt que d'un résultat mathématique. On réfère souvent à cette convention en invoquant la priorité des opérations. Encore une fois, ce sont des expressions qui ne font que traduire l'économie de parenthèses qu'il nous est possible de réaliser ; plutôt que d'écrire

$$1 + ((2 \times 7) + (3 \times 3 - (8 \times 2))),$$

on convient d'écrire simplement $1 + 2 \times 7 + 3 \times 3 - 8 \times 2$. Notons que ce ne sont pas toutes les opérations qui sont associatives. Par exemple,

$$(3 \div 4) \div 5 \neq 3 \div (4 \div 5).$$

Le membre de gauche correspond à la fraction $\frac{3}{20}$, alors que le membre de droite correspond à $\frac{15}{4}$. Il s'agit là de deux fractions qui ne sont pas équivalentes.

L'idée d'associativité s'étend au-delà des opérations sur les nombres. Par exemple, si f, g et h sont des fonctions, alors $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. À titre d'exemple, posons $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = x + 1$. Nous avons que $(f \circ g)(x) = \sin^2(x)$, d'où

$$((f \circ g) \circ h)(x) = \sin^2(h(x)) = \sin^2(x + 1).$$

De même, $(g \circ h)(x) = \sin(x + 1)$, d'où

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f(\sin(x + 1)) = (\sin(x + 1))^2 = \sin^2(x + 1).$$

Encore une fois, l'égalité $(\sin(x + 1))^2 = \sin^2(x + 1)$ est vraie puisqu'il s'agit d'une convention d'écriture.

1.4 Commutativité

Si l'associativité est la possibilité de déplacer des parenthèses, la commutativité est, pour sa part, la possibilité d'inverser l'ordre des deux arguments intervenant dans l'opération. Par exemple, l'équation

$$1 + 3 = 3 + 1$$

est vraie, puisque l'addition est une opération commutative. La multiplication de nombres est aussi une opération commutative[2]. Il en va autrement de la multiplication matricielle.

2. Il est possible de définir une opération de multiplication sur certains ensembles de nombres, de telle sorte que la multiplication ne soit pas commutative. C'est notamment le cas avec l'ensemble des quaternions. Comme ces nombres sont l'apanage des mathématiques avancées et de la physique théorique, nous ne nous étendrons pas davantage sur le sujet.

Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Un énoncé du type « la multiplication est commutative » doit donc être mis en contexte ; il faut bien comprendre de quelle multiplication il s'agit. En principe, on doit toujours préciser l'ensemble sur lequel l'opération est définie. Il serait plus juste de dire que « la multiplication définie sur l'ensemble des nombres réels est une opération commutative », alors que « la multiplication définie sur l'ensemble des matrices 2×2 n'est pas une opération commutative ». L'algèbre moderne s'efforce de clarifier ces notions en introduisant ce qu'on appelle des *structures algébriques*.

1.5 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

On l'a vu, dans une même expression, il est possible de trouver deux opérations de nature différente. Un cas important est celui d'une expression où sont présentes l'addition et la multiplication. C'est ce qu'on constate dans l'expression $5 \times (1 + 3)$. Pour l'évaluer, on peut bien sûr évaluer la somme entre parenthèses, puis multiplier 5 par 4. Une autre avenue possible est de « distribuer » la multiplication par rapport à l'addition, ce qui signifie calculer $(5 \times 1) + (5 \times 3)$. Lorsqu'on affirme que la multiplication est distributive par rapport à l'addition, cela signifie que pour tous nombres a, b et c, on a

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

1.6 Stabilité d'un ensemble par rapport à une opération

Étant donné des nombres a et b appartenant à un ensemble de nombres E, leur somme et leur produit appartiennent toujours à l'ensemble E. Ce n'est pas le cas pour le résultat de toute opération. À titre d'exemple, l'ensemble des nombres naturels n'est pas stable pour la soustraction. En effet, ce ne sont pas tous les problèmes de soustraction[3] qui admettent une solution ; c'est notamment le cas du problème $5 + \square = 3$. L'ensemble des entiers[4] règle le problème de la stabilité pour l'opération de soustraction de nombres naturels, mais cela n'améliore guère les choses pour les problèmes de division.

Prenons deux nombres naturels a et b, tels que b soit non nul, et considérons l'équation $b \times \square = a$. Il arrive que cette équation possède une solution qui est dans $\mathbb{N}$, mais ce n'est généralement pas le cas. Par exemple, $3 \times \square = 12$ possède une solution — le nombre 4 —, mais l'équation $3 \times \square = 13$ n'en possède pas.

L'ajout des nombres fractionnaires[5] permet non seulement de résoudre ce problème dans le cas où a et b sont des nombres naturels, *mais aussi de le faire dans le cas où a et b sont*

3. Un problème de soustraction consiste à trouver une solution à une équation de type $a + \square = b$.

4. Le symbole $\mathbb{Z}$, utilisé pour représenter l'ensemble des entiers, est la première lettre du mot allemand *Zahl*, qui signifie « nombre ».

5. L'ensemble des fractions, aussi appelé ensemble des nombres rationnels, est représenté par le symbole $\mathbb{Q}$. L'ensemble des nombres réels est représenté par le symbole $\mathbb{R}$.

des nombres fractionnaires. C'est cette propriété qu'on évoque lorsqu'on mentionne que les nombres fractionnaires sont stables pour l'opération de division (par un nombre non nul).

Vers le v^{e} siècle avant notre ère, les mathématiciens grecs ont tenté de mesurer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit sont de longueur 1. En utilisant le théorème de Pythagore, ils ont ramené le problème à celui de trouver un nombre x tel que $2 = x^2$. Ils en sont venus à la conclusion que x ne pouvait être le quotient de deux nombres entiers. Bien sûr, le langage utilisé pour exprimer cette constatation était fort différent. On parlait plutôt d'une quantité *incommensurable*, ou encore *inexprimable*. Le tout rédigé en grec ancien ! On ignore toujours si le problème du calcul de la mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le premier qui a amené les Grecs à considérer des nombres irrationnels. Cette découverte suggère néanmoins de définir un ensemble de nombres plus vaste, comprenant le nombre $\sqrt{2}$, mais aussi tous les « trous » sur la droite numérique entre les nombres rationnels. Pour plus d'information sur le nombre $\sqrt{2}$ et l'extraction des racines carrées, voir [Rit06]. L'existence de tels nombres signifiait que les fractions ne remplissaient pas complètement la droite numérique, qu'on associe à l'ensemble des nombres réels.

2 Définition des nombres complexes

Définition 2.1 **Unité imaginaire**

On appelle **unité imaginaire** un nombre qui, multiplié par lui-même, vaut -1. On le notera i.

Remarque 2.1 **Notation en génie électrique**

En sciences physiques, plus particulièrement dans le domaine du génie électrique, le symbole j est utilisé pour représenter l'unité imaginaire. Cela permet d'éviter toute confusion avec l'intensité d'un courant électrique, qui est souvent représentée par la lettre i.

Plusieurs commentaires s'imposent après une telle définition. D'abord, elle se place en opposition avec un fait relayé depuis le secondaire : un nombre, multiplié par lui-même, ne peut donner une quantité strictement inférieure à 0. Cela s'observe notamment en regardant le graphe de la fonction $f(x) = x^2$. Votre étonnement face à cette nouvelle définition est légitime ; on pourrait le comparer à celui vécu par les Grecs lorsqu'ils ont été obligés d'admettre que la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux cathètes mesurent une unité n'était pas un nombre, en vertu du sens attribué à ce concept.

L'arrivée de cet objet mathématique dans le cercle des nombres ne doit pas perturber les lois de l'arithmétique ; sommes et produits faisant intervenir ce nouvel arrivant doivent être bien définis. Si a et b sont des nombres réels, alors $b\,\mathrm{i}$ doit être un nombre (le produit de deux nombres est un nombre), tout comme $a + b\,\mathrm{i}$ (la somme de deux nombres est un nombre). Cela nous conduit à la définition 2.2.

Définition 2.2 **Nombre complexe**

On appelle **nombre complexe** un nombre de la forme $a + b\,\mathrm{i}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{i}^2 = -1$. On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Il n'y a plus de place sur la droite numérique pour ces nombres, contrairement aux éléments des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Puisque deux nombres réels sont nécessaires pour définir un nombre complexe, il est naturel d'associer à chaque nombre complexe un couple de nombres réels, et de les représenter dans un plan (figure 2.1). Il convient alors de définir l'égalité de deux nombres complexes de la manière suivante.

Définition 2.3 **Égalité de deux nombres complexes**

Deux nombres complexes $z = a + b\,\mathrm{i}$ et $w = c + d\,\mathrm{i}$ (où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) **sont égaux** si $a = c$ et $b = d$.

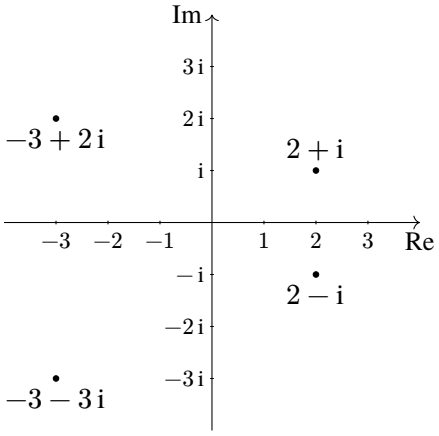


FIGURE 2.1 : Plan complexe, aussi appelé plan de Gauss ou encore plan d'Argand. Quelques points du plan complexe ont été identifiés, et on a précisé pour chacun de ces points le nombre complexe qui lui est associé.

2.1 Somme de deux nombres complexes

Un nombre complexe est défini à partir de deux nombres réels et de l'unité imaginaire. Lorsqu'on veut faire référence à un nombre complexe, il n'est pas nécessaire de le nommer à partir des éléments qui le définissent. Par exemple, on peut dire : *Soit z un nombre complexe*. De cela, il faut comprendre qu'on peut trouver deux nombres réels a et b tels que $z = a + b\ \mathrm{i}$. Cela étant dit, étant donné deux nombres complexes, comment la somme de ceux-ci peut-elle être définie afin que les lois de l'arithmétique soient valides ? En s'inspirant de l'opération d'addition des vecteurs, nous pouvons *définir* l'addition de nombres complexes.

Définition 2.4 **Somme de deux nombres complexes**

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\ y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\ y_2$, où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont des nombres réels. La **somme** de z_1 et z_2, notée $z_1 + z_2$, est le nombre complexe défini par

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\,\mathrm{i}\,.$$

Exemple 2.1 **Somme**

La somme des nombres $1 + 5\,\mathrm{i}$ et $2 - 3\,\mathrm{i}$ est $3 + 2\,\mathrm{i}$.

De la même manière, la **différence** entre z_1 et z_2, notée $z_1 - z_2$, est le nombre complexe défini par

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\,\mathrm{i}\,.$$

Exemple 2.2 **Différence**

Si $z_1 = 1 + 5\,\mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - 3\,\mathrm{i}$, alors $z_1 - z_2 = -1 + 8\,\mathrm{i}$.

On constate que l'opération d'addition est commutative. En effet, cela est une conséquence de la commutativité de l'opération d'addition définie sur les nombres réels : on a bien que

$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2. De la même manière, l'associativité de l'addition des nombres réels implique l'associativité de l'addition des nombres complexes. Ainsi,

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\,.$$

On peut donc parler de la somme de trois nombres complexes en toute impunité et la noter $z_1 + z_2 + z_3$. Comme c'est aussi le cas dans l'ensemble des nombres réels, l'opération de soustraction n'est ni associative ni commutative. On ne doit pas s'en étonner : l'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des nombres réels.

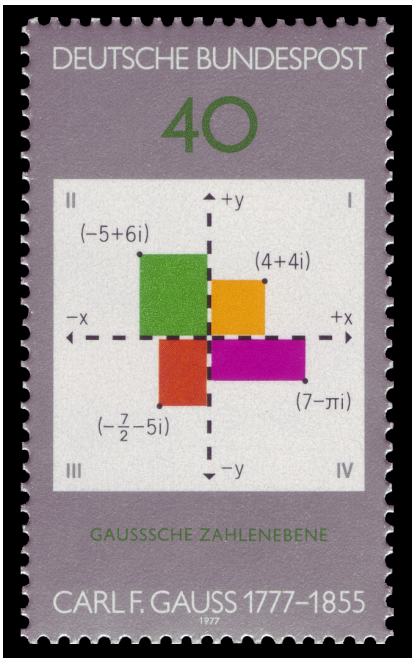


FIGURE 2.2 : Timbre allemand émis en 1977 pour souligner le 200e anniversaire de naissance de Carl F. Gauss.

2.2 Parties réelle et imaginaire

Un nombre complexe est entièrement déterminé par un couple de nombres réels. Réciproquement, un couple de nombres réels détermine un unique nombre complexe. Il y a donc une bijection entre les éléments de $\mathbb{R}^2$ et ceux de $\mathbb{C}$.

Définition 2.5 **Parties réelle et imaginaire**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $z = a + b\,\mathrm{i}$ un nombre complexe. On dit alors que $a + b\,\mathrm{i}$ est la **forme cartésienne** de z. De plus, le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z, et le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z. On les note $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ respectivement.

Remarque 2.2 **Vocabulaire**

— Étant donné un point (x, y) dans le plan, le nombre complexe $x+y\,\mathrm{i}$ s'appelle l'**affixe** du point (x, y).
— Si un nombre complexe peut s'écrire comme $b\,\mathrm{i}$, où $b \in \mathbb{R}$, on dit qu'il est un nombre complexe **imaginaire pur**, ou encore **purement imaginaire**.
— Lorsqu'on dit d'un nombre qu'il est **imaginaire**, cela sous-entend que l'on considère un nombre complexe dont la partie imaginaire est non nulle.
— Au lieu d'écrire $1\,\mathrm{i}$ et $-1\,\mathrm{i}$, on écrit i et $-\,\mathrm{i}$ respectivement.
— *Attention :* la partie imaginaire d'un nombre complexe est toujours un nombre réel. Celle de $a + b\ \mathrm{i}$ est b, et non $b\ \mathrm{i}$.

2.3 Produit de deux nombres complexes

Considérons deux nombres complexes $a + b\,\mathrm{i}$ et $c + d\,\mathrm{i}$. Le produit de ces deux nombres reste à définir. Contrairement à l'addition de vecteurs, qui permet de définir la somme de nombres complexes de manière analogue, l'algèbre linéaire élémentaire ne nous fournit pas de multiplication vectorielle qui associe un vecteur du plan à deux vecteurs du plan. En effet, le produit scalaire de deux vecteurs a pour résultat un nombre réel, alors que le produit vectoriel de deux vecteurs donne un vecteur qui est perpendiculaire au plan engendré par les deux vecteurs dont on calcule le produit. Pour définir l'opération de multiplication de deux nombres complexes, nous allons appliquer certaines propriétés que nous aimerions voir vérifiées lorsqu'une multiplication est effectuée :

$$
\begin{aligned}
(a+b\,\mathrm{i})(c+d\,\mathrm{i}) &= (a+b\,\mathrm{i})c + (a+b\,\mathrm{i})d\,\mathrm{i} && \text{(distributivité)}\\
&= ac + (b\,\mathrm{i})c + a(d\,\mathrm{i}) + b\,\mathrm{i}(d\,\mathrm{i}) && \text{(distributivité)}\\
&= ac + (b\,\mathrm{i})c + (ad)\,\mathrm{i} + b(\mathrm{i}\,d)\,\mathrm{i} && \text{(associativité de la } \times)\\
&= ac + c(b\,\mathrm{i}) + ad\,\mathrm{i} + b(d\,\mathrm{i})\,\mathrm{i} && \text{(commutativité de la } \times)\\
&= ac + (cb)\,\mathrm{i} + ad\,\mathrm{i} + (bd)\,\mathrm{i}\,\mathrm{i} && \text{(associativité de la } \times)\\
&= ac + (bc)\,\mathrm{i} + ad\,\mathrm{i} + (bd)\,\mathrm{i}\,\mathrm{i} && \text{(commutativité de la } \times)\\
&= ac + bc\,\mathrm{i} + ad\,\mathrm{i} + bd\,\mathrm{i}^2 && \text{(convention d'écriture)}\\
&= ac + bc\,\mathrm{i} + ad\,\mathrm{i} + bd(-1) && \text{(définition de } \mathrm{i}^2)\\
&= ac + bc\,\mathrm{i} + ad\,\mathrm{i} + (-1)bd && \text{(commutativité de la } \times)\\
&= ac + (-1)bd + bc\,\mathrm{i} + ad\,\mathrm{i} && \text{(commutativité de l'}+)\\
&= ac - bd + (bc + ad)\,\mathrm{i} && \text{(distributivité)}\\
&= ac - bd + (ad + bc)\,\mathrm{i}\,. && \text{(commutativité de l'}+)
\end{aligned}
$$

Définition 2.6 **Produit**

Soit a, b, c et d des nombres réels. Le **produit des nombres complexes** $a + b\ \mathrm{i}$ et $c + d\ \mathrm{i}$ est défini comme étant le nombre $ac - bd + (ad + bc)\,\mathrm{i}$.

Si on avait fait cette définition *a priori*, elle aurait pu sembler artificielle. Cependant, le travail effectué précédemment nous suggère que c'est la manière la plus convenable de définir le produit, si on souhaite que les lois de l'arithmétique soient vérifiées. On peut bien sûr le faire *a posteriori* : on montre que l'opération définie à la définition 2.6 est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

On peut interpréter géométriquement le produit de deux nombres complexes, mais cela sera grandement facilité par l'introduction de l'argument d'un nombre complexe, que nous aborderons sous peu.

Pour effectuer des calculs faisant intervenir les nombres complexes, il n'est pas nécessaire de retenir cette définition, mais seulement de savoir qu'on peut appliquer les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité telles que présentées précédemment. Bien sûr, tôt ou tard, il faudra utiliser le fait que $\mathrm{i}^2 = -1$ pour ramener notre expression sous la forme $a + b\ \mathrm{i}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.3 **Forme cartésienne d'un produit**

Trouvez la forme cartésienne du nombre $(1 - 2\,\mathrm{i}) \cdot (-3 + 4\,\mathrm{i})$.
Nous avons que

$$\begin{aligned}(1 - 2\,\mathrm{i}) \cdot (-3 + 4\,\mathrm{i}) &= 1 \cdot (-3 + 4\,\mathrm{i}) - 2\,\mathrm{i} \cdot (-3 + 4\,\mathrm{i}) \\ &= -3 + 4\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} \cdot (-3) - 2\,\mathrm{i} \cdot 4\,\mathrm{i} \\ &= -3 + 4\,\mathrm{i} + 6\,\mathrm{i} - 8\,\mathrm{i}^2 \\ &= -3 + 10\,\mathrm{i} - 8(-1) \\ &= -3 + 10\,\mathrm{i} + 8 \\ &= 5 + 10\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Proposition 2.1 **Linéarité des parties réelle et imaginaire**

Soit $z, w \in \mathbb{C}$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\lambda z + \mu w) &= \lambda\,\mathrm{Re}(z) + \mu\,\mathrm{Re}(w) \quad \text{et} \\ \mathrm{Im}(\lambda z + \mu w) &= \lambda\,\mathrm{Im}(z) + \mu\,\mathrm{Im}(w).\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que $z = a + b\,\mathrm{i}$ et $w = c + d\,\mathrm{i}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Nous avons que

$$\lambda z + \mu w = \lambda(a + b\,\mathrm{i}) + \mu(c + d\,\mathrm{i}) = \lambda a + \mu c + (\lambda b + \mu d)\,\mathrm{i}\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\lambda z + \mu w) &= \lambda a + \mu c = \lambda\,\mathrm{Re}(z) + \mu\,\mathrm{Re}(w), \\ \mathrm{Im}(\lambda z + \mu w) &= \lambda b + \mu d = \lambda\,\mathrm{Im}(z) + \mu\,\mathrm{Im}(w).\end{aligned}$$

□

Un cas particulier de la proposition précédente est que la partie réelle d'une somme de nombres complexes est la somme des parties réelles des nombres complexes additionnés. On peut tirer le même constat dans le cas de la partie imaginaire. Cependant, la partie réelle du produit de deux nombres complexes n'est pas le produit des parties réelles des nombres complexes multipliés.

Remarque 2.3 **Partie réelle d'un produit**

Il est faux de dire que la partie réelle du produit de deux nombres complexes est égale au produit des parties réelles des deux nombres multipliés. Par exemple, $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(-1) = -1$, alors que $\mathrm{Re}(\mathrm{i})\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}) = 0$. De même, $\mathrm{Im}(zw) \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)$ en général.

2.4 Inverse

La définition du produit de deux nombres complexes nous amène à nous questionner sur l'existence de l'inverse (multiplicatif) d'un nombre complexe. D'abord, l'inverse d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que $z \times w = 1$. L'inverse de z est noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}. Cette définition n'a de sens que si $z \neq 0$, car dans le cas contraire, il nous faudrait trouver un $w \in \mathbb{C}$ tel que $0 \times w = 1$, ce qui est bien sûr impossible. On peut donc supposer que $z = a + b\,\mathrm{i}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ pas tous les deux nuls, puis partir à la recherche d'un nombre complexe w de la forme $x + y\,\mathrm{i}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule donnant le produit de deux nombres complexes, on doit avoir que

$$\underbrace{ax - by + (ay + bx)\,\mathrm{i}}_{zw} = 1.$$

En égalant parties réelles et imaginaires (c'est ce qu'on doit faire en vertu de la définition d'égalité de deux nombres complexes présentée à la définition 2.3), nous obtenons les équations

$$\begin{aligned} ax - by &= 1, \\ ay + bx &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par a et la seconde par b, nous obtenons les équations

$$\begin{aligned} a^2x - aby &= a, \\ aby + b^2x &= 0. \end{aligned}$$

En additionnant ces équations, on obtient l'équation $a^2x + b^2x = a$. Puisque $a^2 + b^2 \neq 0$ (conséquence du fait que a et b ne sont pas tous les deux nuls, qui à son tour découle de l'observation que $z \neq 0$), on est en droit de diviser par $a^2 + b^2$, et on trouve que $x = \frac{a}{a^2+b^2}$. En procédant d'une manière semblable, on trouve que $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$. Ainsi, l'inverse multiplicatif du nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ est le nombre complexe

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,\mathrm{i}\,.$$

Il n'est pas nécessaire de mémoriser cette formule pour obtenir l'inverse d'un nombre complexe. Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par une quantité bien choisie. Avant de dévoiler cette quantité, rappelons d'abord ce qu'on peut faire pour rationaliser le dénominateur du nombre $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$. On voit au secondaire qu'il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $3-\sqrt{2}$. Cela a pour conséquence de « faire disparaître » la racine du dénominateur. En effet,

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} \times \underbrace{\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}}_{=1} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2} = \frac{3}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}.$$

De la même manière, on peut faire disparaître le i au dénominateur dans l'expression $\frac{1}{a+b\,\mathrm{i}}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par l'expression $a - b\,\mathrm{i}$. Cela est illustré à l'exemple 2.4.

Exemple 2.4 **Inverse d'un nombre complexe**

Trouvez l'inverse de $3 - 2\,\mathrm{i}$ sous forme cartésienne.
Nous avons que

$$\frac{1}{3-2\,\mathrm{i}} = \frac{1}{3-2\,\mathrm{i}} \cdot \frac{3+2\,\mathrm{i}}{3+2\,\mathrm{i}} = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{9+6\,\mathrm{i}-6\,\mathrm{i}-4\,\mathrm{i}^2} = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}\,\mathrm{i}\,.$$

2.5 Quotient

Qu'est-ce que le nombre $\frac{2}{3}$? On peut voir ce dernier comme étant un nombre qui, lorsque multiplié par 3, donne 2. On peut aussi le définir comme étant deux fois l'inverse multiplicatif de trois, c'est-à-dire le nombre $2 \times \frac{1}{3}$. En utilisant les propriétés régissant la structure des nombres, on peut constater que ces définitions sont équivalentes. Regardons ce qui se passe lorsqu'on s'intéresse à un quotient de nombres complexes.

Soit z et w deux nombres complexes tels que $w \neq 0$. Regardons le quotient $\frac{z}{w}$ comme étant le nombre complexe qui, lorsque multiplié par w, donne z. Nous avons alors que $\frac{z}{w} \times w = z$. En multipliant chaque membre par l'inverse de w (ce nombre existe puisque $w \neq 0$), on obtient que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z}{w} \times w\right) \times \frac{1}{w} = z \times \frac{1}{w} \\
&\qquad \Rightarrow \frac{z}{w} \times \left(w \times \frac{1}{w}\right) = z \times \frac{1}{w} && \text{(associativité de la } \times\text{)} \\
&\qquad \Rightarrow \frac{z}{w} \times 1 = z \times \frac{1}{w} && \text{(définition de l'inverse de } w\text{)} \\
&\qquad \Rightarrow \frac{z}{w} = z \times \frac{1}{w}. && \text{(élément neutre multiplicatif)}
\end{aligned}$$

Comme nous savons comment obtenir la forme cartésienne de $\frac{1}{w}$, il nous suffit de la trouver et de la multiplier par z pour obtenir le résultat. Si la forme cartésienne de w est $a + b\,\mathrm{i}$, cela revient à multiplier le numérateur et le dénominateur par $a - b\,\mathrm{i}$. L'exemple suivant illustre un tel calcul.

Exemple 2.5 **Forme cartésienne d'un quotient**

Trouvez la forme cartésienne du nombre complexe $\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\,\mathrm{i}}$.
Nous avons que

$$\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\,\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{3-2\,\mathrm{i}} \cdot \frac{3+2\,\mathrm{i}}{3+2\,\mathrm{i}} = \frac{1+5\,\mathrm{i}}{13} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}\,\mathrm{i}\,.$$

Remarque 2.4 **En pratique**

Pour trouver la forme cartésienne de $\frac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}}$, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $c - d\,\mathrm{i}$.

3 Module et conjugué

3.1 Le conjugué

Au chapitre précédent, nous avons vu que le nombre $a - b\,\mathrm{i}$ était utile pour calculer l'inverse de $a + b\,\mathrm{i}$, ou encore un quotient de nombres complexes présentant le nombre $a + b\,\mathrm{i}$ au dénominateur. Ce nombre apparaît dans d'autres contextes et mérite d'être nommé convenablement.

Définition 3.1 **Conjugué d'un nombre complexe**

Soit a et b des nombres réels, et soit z le nombre complexe $a + b\,\mathrm{i}$. Le nombre complexe $a - b\,\mathrm{i}$ s'appelle le **conjugué** de z. On le note $\overline{z}$.

Trouver la forme cartésienne d'un nombre complexe exprimé sous la forme d'un quotient $\frac{z}{w}$ revient donc à multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué de w.

Sur le plan géométrique, trouver le conjugué d'un nombre complexe consiste à en obtenir l'image par une réflexion selon l'axe réel (figure 3.1). Ainsi, les points appartenant à l'axe réel sont égaux à leur conjugué. Cette propriété est en fait une caractérisation des nombres réels : si un nombre complexe est égal à son conjugué, alors le nombre est réel. Cela peut aussi être obtenu facilement sur le plan algébrique au moyen de la suite d'équivalences ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\overline{z} = z &\iff a - b\,\mathrm{i} = a + b\,\mathrm{i} \\
&\iff \begin{cases} a = a \\ -b = b \end{cases} \\
&\iff b = -b \\
&\iff b = 0 \\
&\iff \operatorname{Im} z = 0 \\
&\iff z \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Proposition 3.1 **Parties réelle et imaginaire**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}$.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + \mathrm{i}\ y$. Un calcul direct nous montre que

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = x \qquad \text{et} \qquad \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}} = y.$$

Comme $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, cela démontre la proposition. □

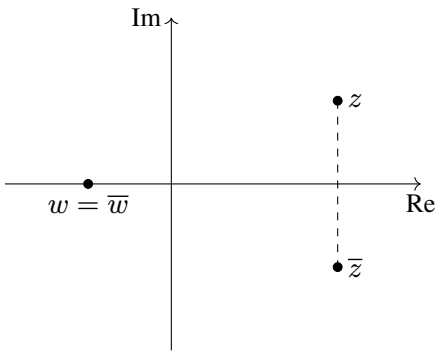


FIGURE 3.1 : Pour trouver le conjugué d'un nombre complexe, il suffit de trouver son image par la réflexion dont l'axe est l'axe réel dans le plan complexe. Les nombres réels sont caractérisés par le fait qu'ils sont égaux à leur conjugué.

3.1.1 Fonctions valeur absolue et racine carrée

Définition 3.2 **Fonction valeur absolue**

La **fonction valeur absolue** est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

D'un point de vue géométrique, la valeur absolue d'un nombre réel correspond à la distance qui le sépare du nombre 0 (figures 3.2 et 3.3).

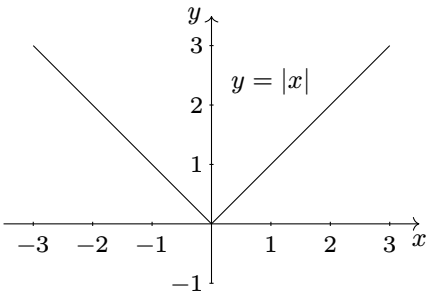


FIGURE 3.2 : La fonction valeur absolue prend la valeur x si $x \geq 0$ et la valeur $-x$ si $x < 0$.

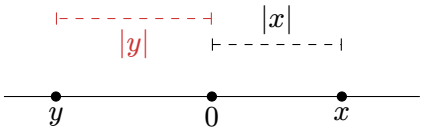


FIGURE 3.3 : D'un point de vue géométrique, la valeur absolue d'un nombre réel correspond à la distance qui le sépare du nombre 0.

Définition 3.3 **Fonction racine carrée**

La **fonction racine carrée** associe à un nombre réel positif x l'unique nombre réel positif, noté $\sqrt{x}$, dont le carré vaut x (figure 3.4). Ainsi,

$$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x \text{ et } y \geq 0.$$

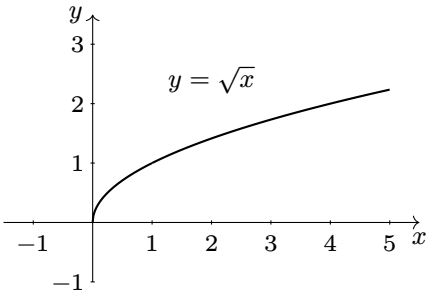


FIGURE 3.4 : La fonction racine carrée associe à un nombre réel positif x l'unique nombre réel positif, noté $\sqrt{x}$, dont le carré vaut x.

Proposition 3.2 **Racine carrée et valeur absolue**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Démonstration. Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2}$ est l'unique nombre positif dont le carré est x^2. Ce nombre est bien sûr x lui-même. Par conséquent, dans le cas où $x \geq 0$, on a que $\sqrt{x^2} = x$. Dans le cas où $x < 0$, il suffit d'observer que $-x > 0$. Ainsi, comme $(-x)^2 = x^2$, le nombre $-x$ est alors un nombre positif dont le carré est x^2. Par définition de $\sqrt{x^2}$, on conclut que $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$. En résumant ce que nous venons de faire, on constate que

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Comme la fonction valeur absolue de x est définie de cette manière, on a forcément que $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

La fonction racine carrée est largement étudiée, que ce soit au secondaire, au collégial ou à l'université. Voici quelques remarques à son sujet.

Remarque 3.1 **Propriétés de la racine carrée**

— Une convention d'écriture nous permet de l'écrire $x^{1/2}$;
— elle est (strictement) croissante sur $[0, \infty[$;
— elle est (infiniment) dérivable sur l'intervalle $]0, \infty[$;
— $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour tout $a, b \in [0, \infty[$;
— $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour tout $a \in [0, \infty[$ et pour tout $b \in]0, \infty[$;
— $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, sauf dans le cas où a ou b est égal à zéro ;
— $\sqrt{x}$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.

3.2 Module

Il est possible de définir une fonction sur $\mathbb{C}$ qui prolonge[1] la fonction valeur absolue de manière continue. La notion de module d'un nombre complexe vient généraliser cette notion.

Définition 3.4 **Module**

Soit a et b des nombres réels et soit z le nombre complexe $a + b\ \mathrm{i}$. Le **module** de z, noté $|z|$, est défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Plus un nombre complexe est loin de l'origine, plus son module est grand (figure 3.5). Voici quelques propositions faciles à démontrer concernant le module d'un nombre complexe.

Proposition 3.3 **Le module est positif**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \in [0, \infty[$.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence immédiate de la propriété de la fonction racine carrée voulant que celle-ci soit toujours positive. Si $z = x + \mathrm{i}\ y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. □

Proposition 3.4 **Module nul**

Le seul nombre complexe z vérifiant $|z| = 0$ est $z = 0$.

Démonstration. Il est clair que si $z = 0$, alors $|z| = 0$. Maintenant, si $|z| = 0$ où $z = x + \mathrm{i}\ y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Cela implique que $x^2 + y^2 = 0$, qui à son tour implique que $x = y = 0$. On doit donc avoir que $z = 0$. □

Proposition 3.5 **Module du conjugué**

Nous avons que $|\overline{z}| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Si $z = x + \mathrm{i}\ y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. □

Proposition 3.6 **Carré du module**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a que $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration. Si $z = x + \mathrm{i}\ y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}\ y)(x - \mathrm{i}\ y) = x^2 + y^2 = |z|^2$. □

1. Cela signifie qu'on peut trouver une fonction qui est continue sur $\mathbb{C}$ et qui est égale à la fonction valeur absolue sur la partie de $\mathbb{C}$ correspondant à $\mathbb{R}$.

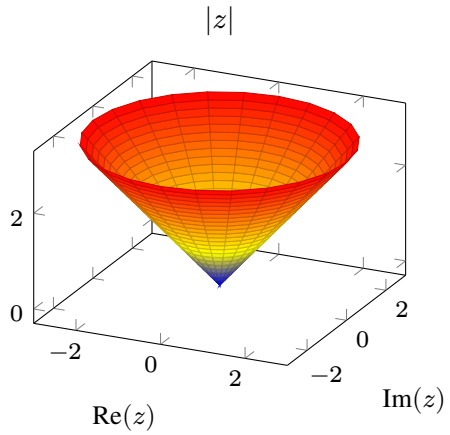


FIGURE 3.5 : Module d'un nombre complexe. Plus un nombre complexe est loin de l'origine, plus son module est grand. Le graphe de la fonction associant un nombre complexe à son module prend la forme d'un cône. Ici, on peut voir son allure au-dessus du disque de rayon 3 centré à l'origine.

Les nombres complexes ne forment pas un ensemble totalement ordonné, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir une relation d'ordre compatible avec l'addition. Ainsi, si w est un nombre complexe quelconque, on ne peut pas définir une relation $<$ telle que $z_1 < z_2 \Rightarrow z_1 + w < z_2 + w$ pour des nombres complexes z_1 et z_2 arbitraires. C'est une différence importante par rapport aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Par contre, puisque le module d'un nombre complexe est toujours un nombre réel, on peut écrire que $|z_1| < |z_2|$, et interpréter cela en disant que z_1 est plus près de l'origine que z_2 dans le plan complexe.

3.3 Propriétés du conjugué et du module

Voici une liste de propriétés relatives au conjugué d'un ou de plusieurs nombres complexes, ainsi que leur démonstration.

Proposition 3.7 **Conjugué du conjugué**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Posons $z = x + \mathrm{i}\ y$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{x + \mathrm{i}\ y}} && \text{par définition de } z,\\
&= \overline{x - \mathrm{i}\ y} && \text{par définition du conjugué,}\\
&= x + \mathrm{i}\ y && \text{par définition du conjugué,}\\
&= z && \text{par définition de } z.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.8 **Conjugué d'une somme**

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Démonstration. Posons $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\ y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\ y_2$, où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Nous avons que

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + \mathrm{i}\ y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\ y_2)} && \text{par définition de } z_1 \text{ et } z_2,\\
&= \overline{x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2)} && \text{par définition de la somme,}\\
&= x_1 + x_2 - \mathrm{i}(y_1 + y_2) && \text{par définition du conjugué,}\\
&= x_1 - \mathrm{i}\ y_1 + x_2 - \mathrm{i}\ y_2 &&\\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2} && \text{par définition du conjugué.}
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.9 **Conjugué d'un produit**

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Démonstration. Soit $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\ y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\ y_2$, où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Nous avons que

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + \mathrm{i}\ y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\ y_2)} && \text{par définition de } z_1 \text{ et } z_2,\\
&= \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2)} && \text{par définition du produit,}\\
&= x_1 x_2 - y_1 y_2 - \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) && \text{par définition du conjugué.} \quad (\star)
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= \overline{x_1 + \mathrm{i}\ y_1} \cdot \overline{x_2 + \mathrm{i}\ y_2} && \text{par définition de } z_1 \text{ et } z_2,\\
&= (x_1 - \mathrm{i}\ y_1) \cdot (x_2 - \mathrm{i}\ y_2) && \text{par définition du conjugué,}\\
&= x_1 x_2 - y_1 y_2 - \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) && \text{par définition du produit.} \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite de l'équation $(\star\star)$ correspond au membre de droite de l'équation $(\star)$, la proposition est établie. □

Proposition 3.10 **Conjugué d'une puissance**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3.9. En effet, en posant $z_1 = z_2 = z$, nous obtenons que

$$\overline{z^2} = \overline{z \cdot z} = \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z}^2.$$

Il suffit ensuite de répéter l'application de cette propriété. Par exemple,

$$\overline{z^3} = \overline{z \cdot z^2} = \overline{z} \cdot \overline{z^2} = \overline{z} \cdot \overline{z}^2 = \overline{z}^3.$$

On peut continuer ainsi pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$. Cette méthode de démonstration repose sur le principe d'induction. □

Proposition 3.11 **Conjugué d'un quotient**

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, où $z_2 \neq 0$. Alors

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Démonstration. Pour $z_2 \neq 0$, nous avons que

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= \overline{z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}} \\ &= \overline{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} && \text{d'après la proposition 3.9.}\end{aligned}$$

En divisant chaque membre de l'équation par $\overline{z_2}$ (on a le droit de le faire, car $z_2 \neq 0$, d'où $\overline{z_2} \neq 0$), on complète la démonstration. □

Voici une liste de propriétés relatives au module d'un ou de plusieurs nombres complexes, ainsi que leur démonstration. Dans ce qui suit, on pose $z = x + \mathrm{i}\ y$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\ y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\ y_2$, où $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.12 **Partie réelle et module**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

Démonstration. Nous avons que

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} && \text{par définition de } |z|, \\ &\geq \sqrt{x^2} && \text{(croissance de la fonction racine carrée)} \\ &= |x| && \text{d'après la proposition 3.2,} \\ &\geq x && \text{(propriété de la valeur absolue)} \\ &= \mathrm{Re}(z) && \text{par définition de } \mathrm{Re}(z).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.13 **Partie imaginaire et module**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.

Démonstration. Nous avons que

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} && \text{par définition de } |z|, \\ &\geq \sqrt{y^2} && \text{(croissance de la fonction racine carrée)} \\ &= |y| && \text{d'après la proposition 3.2,} \\ &\geq y && \text{(propriété de la valeur absolue)} \\ &= \mathrm{Im}(z) && \text{par définition de } \mathrm{Im}(z).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.14 **Module d'un produit**

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Démonstration. Nous avons que

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |(x_1 + \mathrm{i}\ y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\ y_2)| && \text{(définition de } z_1 \text{ et } z_2) \\ &= |x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2)| \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2} && \text{(définition du module).} \quad (\star)\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} |z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} && \text{(définition du module)} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2}. && (\star\star) \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite de l'équation $(\star)$ correspond au membre de droite de l'équation $(\star\star)$, les membres de gauche de ces équations doivent être égaux, ce qui établit la propriété. □

Proposition 3.15 **Module d'une puissance**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3.14. En effet, en posant $z_1 = z_2 = z$, nous obtenons que

$$\left|z^2\right| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2.$$

Il suffit ensuite de répéter l'application de cette proposition. Par exemple,

$$\left|z^3\right| = \left|z \cdot z^2\right| = |z| \cdot \left|z^2\right| = |z| \cdot |z|^2 = |z|^3.$$

On peut continuer ainsi pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$. Comme c'était le cas dans la démonstration de la proposition 3.10, le principe d'induction est la méthode de démonstration utilisée ici. □

Proposition 3.16 **Module d'un quotient**

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, où $z_2 \neq 0$. Alors $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration. Pour $z_2 \neq 0$, nous avons que

$$\begin{aligned} |z_1| &= \left|z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}\right| \\ &= |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right| && \text{d'après la proposition 3.14.} \end{aligned}$$

En divisant chaque membre de l'équation par $|z_2|$ (on a le droit de le faire, car $z_2 \neq 0$, d'où $|z_2| \neq 0$), on complète la démonstration. □

Proposition 3.17 **Inégalité triangulaire**

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Démonstration. Dans un premier temps, on observe que si a et b sont des nombres réels positifs, alors $a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$ (ce n'est pas forcément le cas si a et b peuvent être négatifs). Ainsi, puisque $|z_1 + z_2|$ et $|z_1| + |z_2|$ sont des nombres réels positifs, il suffit de montrer que

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Nous avons que

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) && \text{selon la prop. 3.6,}\\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) && \text{selon la prop. 3.8,}\\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{\overline{z_1}} \cdot \overline{z_2} + z_2\overline{z_1} && \text{selon les prop. 3.6 et 3.7,}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + z_2\overline{z_1} && \text{selon la prop. 3.9,}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \frac{\overline{z_2\overline{z_1}} + z_2\overline{z_1}}{2}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_2\overline{z_1}) && \text{selon la prop. 3.1,}\\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2\overline{z_1}| && \text{selon la prop. 3.12,}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2| \cdot |\overline{z_1}| && \text{selon la prop. 3.14,}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2| \cdot |z_1| && \text{selon la prop. 3.5,}\\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}
$$

□

4 Lieux géométriques dans le plan complexe

Définition 4.1 **Lieu géométrique**

Un **lieu géométrique** dans le plan complexe est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Généralement, on veut connaître l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ qui vérifient une équation donnée. Parfois, il faut aussi interpréter le lieu qui est décrit sous forme d'équation au moyen d'objets géométriques (points, droites, paraboles, etc.).

Proposition 4.1 **Caractérisation d'un cercle**

Soit $w \in \mathbb{C}$, et soit $r > 0$. Le lieu des nombres complexes z satisfaisant $|z - w| = r$ est un cercle de rayon r centré en w.

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = a + b\,\mathrm{i}$, et soit z un nombre complexe de forme cartésienne $x + y\,\mathrm{i}$. Nous avons que

$$\begin{aligned} |z - w| = r &\iff |x + y\,\mathrm{i} - (a + b\,\mathrm{i})| = r \\ &\iff |(x - a) + (y - b)\,\mathrm{i}\,| = r \\ &\iff \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \end{aligned}$$

On reconnaît que la dernière équation est celle d'un cercle de rayon r centré en (a, b). □

Traduit dans le langage des nombres complexes, cela signifie deux choses : d'une part, les nombres complexes z satisfaisant $|z - w| = r$ sont sur le cercle de rayon r centré en w ; d'autre part, les nombres complexes sur le cercle de rayon r centré en w satisfont $|z - w| = r$. L'équation $|z - w| = r$ est une *caractérisation* du lieu géométrique correspondant au cercle de rayon r centré en w. La valeur de $|z - w|$ correspond ainsi à la distance (euclidienne[1]) entre les points du plan complexe associés aux nombres z et w.

Remarque 4.1 **Distance entre deux nombres complexes**

Si z et w sont des nombres complexes, alors $|z - w|$ correspond à la distance entre les points associés à ces nombres.

1. En mathématiques, il existe plusieurs manières de mesurer la distance entre des objets. La distance usuelle entre deux points, appelée aussi distance euclidienne, est celle du segment qui relie les points. On pourrait procéder autrement. Par exemple, pour mesurer la distance entre Québec et Paris (qu'on pourrait modéliser comme étant deux points dans l'espace), il pourrait être approprié de mesurer la longueur de l'arc du grand cercle centré au centre de la Terre reliant ces deux villes plutôt que d'utiliser la longueur du segment qui les relie.

On pourrait distinguer deux approches pour déterminer la nature d'un lieu géométrique caractérisé au moyen d'une équation. D'une part, dans la mesure où les concepts relatifs aux nombres complexes sont connus, de même que certains résultats élémentaires, ces derniers peuvent servir à représenter le lieu associé à une équation donnée. Par exemple, l'équation $|2z - 4\,\mathrm{i}\,| = 2$ caractérise les nombres complexes situés sur le cercle de rayon 1 centré en $2\,\mathrm{i}$. Cela s'explique au moyen de la proposition 4.1 et des propriétés du module. Nous avons que

$$\begin{aligned} |2z - 4\,\mathrm{i}\,| = 2 &\iff |2(z - 2\,\mathrm{i})| = 2 \\ &\iff 2|z - 2\,\mathrm{i}\,| = 2 \\ &\iff |z - 2\,\mathrm{i}\,| = 1. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut aussi choisir d'exprimer z comme étant un nombre de la forme $x + \mathrm{i}\ y$, où x et y sont des nombres réels. Ensuite, en utilisant nos connaissances des concepts relatifs aux nombres complexes, et celles que nous avons des lieux géométriques formés de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'interprétation est souvent possible. Si on reprend le même exemple, nous avons que

$$\begin{aligned} |2z - 4\,\mathrm{i}\,| = 2 &\iff |2(x + \mathrm{i}\,y) - 4\,\mathrm{i}\,| = 2 \\ &\iff |2x + (2y - 4)\,\mathrm{i}\,| = 2 \\ &\iff \sqrt{4x^2 + (2y - 4)^2} = 2 \\ &\iff 4x^2 + 4(y - 2)^2 = 4 \\ &\iff x^2 + (y - 2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dans la mesure où on sait qu'un cercle de rayon r centré au point (h, k) a pour équation $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, il devient facile de se représenter le lieu. À l'exemple 4.1, on présente deux approches pour déterminer la nature d'un lieu géométrique caractérisé au moyen des nombres complexes.

Exemple 4.1 **Un exemple de lieu géométrique**

Représentez dans le plan complexe l'ensemble des nombres z tels que

$$z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2 = 16.$$

En posant $z = x + \mathrm{i}\, y$, puis en remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2 = 16 &\iff (x + \mathrm{i}\, y)^2 + 2(x^2 + y^2) + (x - \mathrm{i}\, y)^2 = 16 \\ &\iff x^2 + 2xy\,\mathrm{i} - y^2 + 2x^2 + 2y^2 + x^2 - 2xy\,\mathrm{i} - y^2 = 16 \\ &\iff 4x^2 = 16 \\ &\iff x = \pm 2. \end{aligned}$$

Il est aussi possible de raisonner uniquement avec le vocabulaire des nombres complexes. En observant que $|z|^2 = z\overline{z}$, nous avons que

$$\begin{aligned} z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2 = 16 &\iff z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 = 16 \\ &\iff (z + \overline{z})^2 = 16 \\ &\iff z + \overline{z} = \pm 4 \\ &\iff \frac{z + \overline{z}}{2} = \pm 2 \\ &\iff \mathrm{Re}(z) = \pm 2. \end{aligned}$$

Ce lieu géométrique est représenté à la figure 4.1.

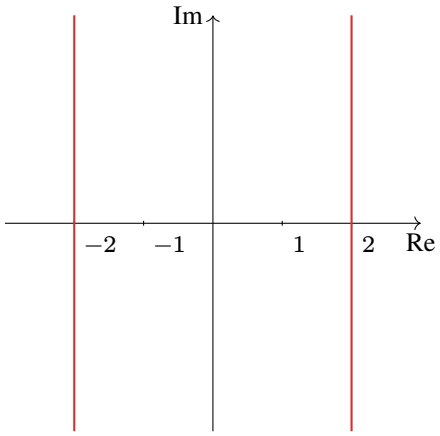


FIGURE 4.1 : L'ensemble des nombres complexes satisfaisant l'équation $z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2 = 16$ est formé de deux droites verticales dans le plan complexe. Les points appartenant à ce lieu sont ceux dont la partie réelle vaut 2 ou -2.

Proposition 4.2 **Caractérisation d'une ellipse**

Soit $a > 0$ et soit $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|w_1 - w_2| < 2a$. Le lieu des nombres complexes z satisfaisant

$$|z - w_1| + |z - w_2| = 2a$$

est une ellipse de foyers w_1, w_2 et de grand axe $2a$.

La condition $|w_1 - w_2| < 2a$ est présente pour éviter d'appeler ellipse l'ensemble vide.

En effet, dans le cas où les points w_1 et w_2 sont éloignés d'une distance supérieure à $2a$, l'inégalité triangulaire exclut la possibilité que

$$|z - w_1| + |z - w_2| = 2a \quad \text{pour un certain } z \in \mathbb{C}\,.$$

Pour une raison similaire, la condition $|w_1 - w_2| > 2a$ est nécessaire pour que le lieu défini à la proposition 4.3 soit non vide.

Proposition 4.3 **Caractérisation d'une hyperbole**

Soit $a > 0$ et soit $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|w_1 - w_2| > 2a$. Le lieu des nombres complexes z satisfaisant

$$|z - w_1| - |z - w_2| = \pm 2a$$

est une hyperbole de foyers w_1, w_2 et de grand axe $2a$.

Les propositions 4.2 et 4.3 sont des conséquences immédiates des définitions de l'ellipse et de l'hyperbole. En effet, l'ellipse de foyers F_1 et F_2 et de grand axe $2a$ est le lieu des points P tels que $PF_1 + PF_2 = 2a$, tandis que l'hyperbole de foyers F_1 et F_2 et de grand axe $2a$ est le lieu des points P tels que $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

5 Exercices — série 1

Ces exercices portent sur la forme cartésienne des nombres complexes (chapitres 2 à 4).

Exercice 5.1. Soit $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 3 - 4\,\mathrm{i}$. Écrivez, sous forme cartésienne, chacun des nombres ci-dessous.

a) $z_1 + z_2$
b) $|z_1 + z_2|$
c) $\frac{z_1}{z_2}$
d) $\frac{z_1}{z_1 - z_2}$
e) $z_1^2 + z_2^2$
f) $(z_1 + \overline{z_1})\,(z_2 + \overline{z_2})$
g) $\frac{z_2^2 - z_1^2}{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}$
h) $(z_1 - 2)^{10}$
i) $\frac{(2z_2 - 3z_1)^8}{(z_2 + 4z_1)^5}$
j) $\left|\frac{z_1^2 + z_2^3}{2z_2 + 8z_1}\right|$

Exercice 5.2. Pour chacune des équations ci-dessous, trouvez les nombres complexes z qui la satisfont.

a) $\frac{z}{2-\mathrm{i}} = 7 + 5\,\mathrm{i}$
b) $z = (1 + \mathrm{i})^{10}$
c) $(2z + 3)(5z - 5 + 5\,\mathrm{i}) = 0$
d) $|z| = 2\,\mathrm{i}$
e) $\frac{z}{2+\mathrm{i}-z} = 3 + 2\,\mathrm{i}$
f) $\overline{z}z = 4$
g) $z = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \cdots + \mathrm{i}^{999}$
h) $-\frac{2\,\mathrm{i}}{z} = \frac{z}{32\,\mathrm{i}}$
i) $\left|z^2 - 1\right| = z^2 - 1$
j) $(3z + 4\,\mathrm{i}\,z)(z - 5\,\mathrm{i}) = 0$

Exercice 5.3. Représentez chacun des ensembles suivants dans le plan complexe.

a) $\{z \in \mathbb{C} : z = x + x\,\mathrm{i}, x \in \mathbb{R}\}$
b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}\}$
d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}\}$
e) $\{z \in \mathbb{C} : 2z = \mathrm{Re}(z + \overline{z})\}$
f) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) \notin \mathbb{R}\}$
g) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = |\overline{z}|\}$
h) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + 2 = z + 2\}$
i) $\{z \in \mathbb{C} : |z + w| = |w|\ \forall w \in \mathbb{C}\}$
j) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Im}(z)\}$

Exercice 5.4. Montrez chacune des propriétés ci-dessous. Dans tous les cas, z, z_1 et z_2 sont des nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$
b) $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$
c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
d) $|z^n| = |z|^n$
e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)$
f) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
g) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
h) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
i) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (z_2 \neq 0)$

Exercice 5.5. Soit les nombres complexes $z_1 = -4 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 + 8\ \mathrm{i}$ et $z_3 = 20 + 24\ \mathrm{i}$.

a) Trouvez l'équation de la droite passant par les points z_1 et z_2.
b) Est-ce que les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sont alignés ? Justifiez.

Exercice 5.6. Trouvez les nombres complexes z qui satisfont simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |z - 3 - 3\,\mathrm{i}\,| &= 2, \\ z(1 - \mathrm{i}) &= \overline{z}(1 + \mathrm{i}). \end{aligned}$$

Exercice 5.7. Pour chacune des équations ci-dessous, représentez, dans le plan complexe, les nombres complexes z qui la satisfont.

a) $(2\,\mathrm{i} + 1)z + (2\,\mathrm{i} - 1)\overline{z} = 20\,\mathrm{i}$
b) $|z| = z$
c) $|z - 1| + |z + 1| = 4$
d) $|z - 1| + |z + 1| = 2$
e) $|z - 1 - \mathrm{i}\,| + |z + 1 + \mathrm{i}\,| = 10$
f) $|z - 3| - |z + 5| = \pm 2$
g) $|z - 3| - |z + 5| = 2$
h) $|z - 3| - |z + 5| = \pm 8$
i) $|z - 2| - |z + 2| = 0$
j) $|z - 2|z\overline{z} = 0$
k) $z + 3\overline{z} + 8 - 4\,\mathrm{i} = 7 + 12\,\mathrm{i}$
l) $4\,(z - \overline{z}) = 2\,\mathrm{i}\,\left(z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2\right)$

6 Forme polaire

Bien que, la plupart du temps, le système de coordonnées cartésiennes soit le plus commode pour décrire la position des points dans le plan, il arrive qu'une autre manière, où la notion d'angle est exploitée, soit à privilégier. On parle alors d'une représentation polaire, ou trigonométrique, du point dans le plan (figure 6.1).

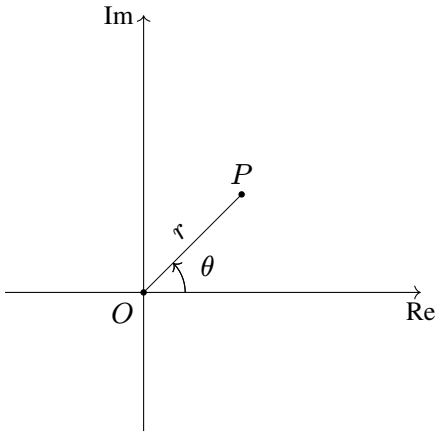


FIGURE 6.1 : En coordonnées polaires, deux nombres réels sont nécessaires pour identifier la position d'un point P à partir d'un point O dans un plan. Le nombre r correspond à son module et θ à son argument.

Définition 6.1 **Argument principal**

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$, un nombre complexe de module r. L'**argument principal** de z, noté $\mathrm{Arg}(z)$, est l'unique nombre θ qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \\ -\pi &< \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Définition 6.2 **Forme polaire**

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$, un nombre complexe de module r et d'argument principal θ. Le nombre z est exprimé sous sa **forme polaire** lorsqu'on écrit

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

Remarque 6.1 **Argument et forme polaire**

1. L'argument principal de 0 n'est pas défini. Le nombre 0 n'a donc pas de forme polaire ; on peut cependant le caractériser comme étant l'unique nombre ayant un module de 0.
2. On écrit $\arg(z)$ pour désigner un angle θ, pas nécessairement dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, qui satisfait $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
3. Pour avoir la forme polaire d'un nombre z, il est important que θ soit l'argument principal de z, c'est-à-dire qu'il appartienne à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
4. Parfois, on retrouve la notation $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ à la place de $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Proposition 6.1 **Calcul de l'argument principal**

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe de forme cartésienne $x + \mathrm{i}\ y$. Son argument principal, noté θ, est donné par la formule

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0. \end{cases}$$

La démonstration de la proposition précédente ne pose aucune difficulté si on prend la peine de représenter convenablement un nombre complexe z dans chacun des scénarios énumérés.

Exemple 6.1 **Calcul d'une forme polaire**

Trouvez la forme polaire du nombre $2 + 2\,\mathrm{i}$.
Le module du nombre $2 + 2\,\mathrm{i}$ est $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. L'argument principal est la mesure de l'angle illustré à la figure 6.2. Ainsi, la forme polaire de $2 + 2\,\mathrm{i}$ est

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

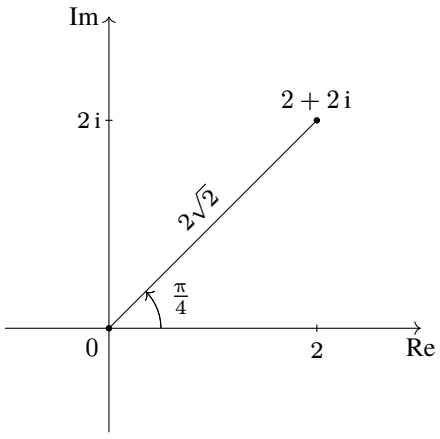


FIGURE 6.2 : La forme polaire du nombre $2 + 2\,\mathrm{i}$. Nous avons que $2 + 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

7 La fonction exponentielle complexe

Dès la fin du secondaire, la fonction exponentielle est présentée comme une fonction incontournable en mathématiques. Elle apparaît dans plusieurs contextes, et vérifie des propriétés remarquables. On la présente comme l'unique fonction égale à sa dérivée en tout point de son domaine qui prend la valeur 1 en 0. Si on décide de la noter $\exp(x)$, elle vérifie notamment les propriétés suivantes :

- $\exp(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\exp(x)^y = \exp(xy)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\exp(0) = 1$.

L'analogie entre ces propriétés et la manière d'écrire certaines opérations de l'arithmétique élémentaire suggère de noter la fonction exponentielle e^x. Les propriétés énoncées plus haut se traduisent alors par :

- e^x est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
- $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\mathrm{e}^0 = 1$.

Il est aussi possible de définir la fonction exponentielle par le biais d'une série. Rappelons d'abord quelques faits concernant ce sujet.

Au niveau collégial, une partie du cours de calcul intégral est consacrée à l'étude des séries de nombres réels. On y apprend entre autres qu'en augmentant la valeur de n dans l'expression

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

on peut obtenir un nombre aussi grand qu'on le désire. En utilisant la notation sigma, cela se traduit par l'affirmation que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Il est aussi démontré qu'en augmentant la valeur de n dans l'expression

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n},$$

on peut obtenir un nombre aussi près qu'on le souhaite du nombre 2. Cela se traduit par l'égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

Dans le premier exemple, la série diverge (vers l'infini) ; dans le second cas, elle converge vers le nombre 2. Si nous remplaçons le $\frac{1}{2}$ par 3 dans la dernière série, on se retrouve alors à additionner les puissances de 3 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = \infty.$$

C'est donc dire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge pour certaines valeurs de x, et diverge pour d'autres. Cette constatation nous pousse à étudier ce que nous convenons d'appeler les *séries de puissances*. La question fondamentale est alors la suivante : étant donné une suite de nombres réels $(a_0, a_1, ...)$, pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge-t-elle ? À l'aide de certains critères de convergence, on peut montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $]-1, 1[$, et diverge à l'extérieur de ce même intervalle. Il est aussi possible qu'une série de puissances ne converge que pour $x = 0$. C'est le cas de la série $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$. En revanche, il est aussi possible qu'une série converge quelle que soit la valeur de x. C'est précisément ce qui se produit pour la série de puissances $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

En analyse complexe, on peut considérer la situation analogue suivante : étant donné une suite de nombres complexes $(a_0, a_1, ...)$, pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la série de puissances (aussi appelée série entière) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge-t-elle ? Encore une fois, il est possible de montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Cette démonstration est basée sur le critère de d'Alembert. Cette série entière est fondamentale en mathématiques : c'est la fonction exponentielle.

Définition 7.1 **Fonction exponentielle**

La **fonction exponentielle** est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ en posant

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Considérons x, un nombre réel quelconque. En remplaçant z par $\mathrm{i}\, x$ dans l'expression précédente, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} &= 1 + \mathrm{i}\, x + \frac{(\mathrm{i}\, x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\, x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\, x)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\, x)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}\, x)^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + \mathrm{i}\, x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\, \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\, \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \mathrm{i}\, \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \mathrm{i} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) \\
&= \cos x + \mathrm{i} \sin x.
\end{aligned}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième se justifie en observant que

$$\mathrm{i}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 4, 8, ... \\ \mathrm{i} & \text{si } k = 1, 5, 9, ... \\ -1 & \text{si } k = 2, 6, 10, ... \\ -\mathrm{i} & \text{si } k = 3, 7, 11, ... \end{cases}$$

Le passage de la deuxième ligne à la troisième est valable, car il est possible, pour cette série, de changer l'ordre des termes additionnés sans modifier le résultat. Ce n'est pas le cas de toutes les séries. Finalement, le passage entre les deux dernières lignes est justifié par le fait que le développement en série de puissances des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ correspond aux séries de puissances suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.
\end{aligned}$$

Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ étant égales à leur série de puissances respective sur $\mathbb{R}$, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 7.1 **Théorème d'Euler**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$e^{i\,x} = \cos x + i \sin x.$$

Supposons maintenant que z soit un nombre complexe de module r et d'argument principal x. En multipliant chaque membre de l'équation $e^{i\,x} = \cos x + i \sin x$ par r, on en déduit que z est aussi égal à $r\,e^{i\,x}$.

Définition 7.2 **Forme exponentielle**

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument principal θ. La **forme exponentielle** de z est donnée par

$$z = r\,e^{i\,\theta}.$$

Le travail que nous venons d'effectuer, basé sur une définition de l'exponentielle à l'aide d'une série, nous permet d'évaluer facilement cette fonction pour les nombres complexes purement imaginaires, c'est-à-dire ceux de la forme $i\,x$ avec $x \in \mathbb{R}$. Dans le cas d'un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont toutes les deux non nulles, on peut bien sûr utiliser la définition, ce qui revient à évaluer la série présentée à la définition 7.1. Cette tâche semble laborieuse. Moyennant certains efforts, il est possible de montrer que la fonction e^z définie par la série présentée à la définition 7.1 vérifie $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ pour tout $w, z \in \mathbb{C}$. En particulier, si w est égal au nombre réel x, et si z est égal au nombre imaginaire pur $i\,y$, on a que $e^{x+i\,y} = e^x \cdot e^{i\,y}$. Ainsi, quel que soit le nombre complexe z écrit sous la forme $x + i\,y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, il suffit de calculer $e^x \cdot e^{i\,y}$.

Proposition 7.2 **Exponentielle d'un nombre complexe**

Soit z un nombre complexe dont la forme cartésienne est donnée par $x + i\,y$. Alors

$$e^z = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x\,(\cos y + i \sin y).$$

De la proposition précédente, nous pouvons déduire facilement les propriétés suivantes.

Proposition 7.3 **Propriétés de l'exponentielle**

Soit z un nombre complexe de forme cartésienne $x + i\,y$. Alors

1. $|e^z| = e^x$;
2. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
3. $e^{z+2k\pi i} = e^z$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 7.1 **Calcul de l'exponentielle**

Calculez l'exponentielle de $2 - \frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}$.
Nous avons que

$$\mathrm{e}^{2-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}} = \mathrm{e}^2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\mathrm{e}^2\,\mathrm{i}\,.$$

L'exemple 7.1 illustre que l'exponentielle d'un nombre complexe peut être un nombre imaginaire pur. De même, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$: l'exponentielle d'un nombre imaginaire peut être un nombre réel.

8 Les formules d'Euler et celle de De Moivre

Tenons-nous-le pour dit : Euler a démontré une pléiade de formules durant sa vie. Dans ce chapitre, nous faisons allusion à certaines formules qu'il a établies entre la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques. Ces dernières apparaissent dans son ouvrage *Introductio in analysin infinitorum*, publié en 1748.

Proposition 8.1 **Formules d'Euler**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Démonstration. Nous avons précédemment établi (voir le théorème 7.1) que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par θ dans cette équation, nous obtenons que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta. \tag{$\star$}$$

Aussi, en remplaçant x par $-\theta$ dans l'équation du théorème 7.1, nous obtenons que

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta).$$

En observant que la fonction cos est paire et que la fonction sin est impaire, on en déduit que

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta. \tag{$\star\star$}$$

Ainsi, en observant que la somme des membres de gauche des équations $(\star)$ et $(\star\star)$ est égale à la somme des membres de droite de ces mêmes équations, on obtient que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = 2\cos\theta.$$

En divisant par 2 chaque membre de la dernière équation, nous avons montré la première identité. Pour obtenir la seconde identité, on doit plutôt soustraire les équations $(\star)$ et $(\star\star)$. On obtient ainsi que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = 2\,\mathrm{i}\sin\theta.$$

En divisant par $2\,\mathrm{i}$, nous obtenons la deuxième identité de la proposition 8.1. □

Remarque 8.1 **Fonctions paires et impaires**

Une fonction f est dite **paire** si elle vérifie $f(-x) = f(x)$ partout sur son domaine de définition, et **impaire** si elle vérifie plutôt $f(-x) = -f(x)$. Le produit de deux fonctions paires, ou de deux fonctions impaires, est une fonction paire ; le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire. On retrouve ainsi la règle qui régit la parité de la somme de deux nombres entiers.

Proposition 8.2 **Formule de De Moivre**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Démonstration. Puisque l'exponentielle d'une somme est égale au produit des exponentielles, nous avons que

$$\mathrm{e}^{\overbrace{\mathrm{i}\theta+\mathrm{i}\theta+\cdots+\mathrm{i}\theta}^{n \text{ fois}}} = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}_{n \text{ fois}}.$$

C'est donc dire que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n.$$

En utilisant le théorème 7.1 pour exprimer les deux membres de cette équation à l'aide des fonctions sin et cos, nous obtenons que

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n,$$

ce qui est précisément ce que nous voulions montrer. □

La formule de De Moivre est particulièrement utile pour exprimer les fonctions $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction des puissances des fonctions $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

Exemple 8.1 **Applications de la formule de De Moivre**

En appliquant la proposition 8.2 avec $n = 2$, nous avons que

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\sin(2\theta).$$

En développant le membre de gauche, nous obtenons que

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\,\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\sin(2\theta).$$

Puis, en égalant parties réelle et imaginaire, on déduit que

$$\begin{aligned}\cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos(2\theta),\\ 2\sin\theta\cos\theta &= \sin(2\theta).\end{aligned}$$

Ces équations sont vraies quelle que soit la valeur de θ. Ce sont des identités trigonométriques utiles dans différents contextes. Finalement, en utilisant l'identité trigonométrique $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, il est possible de réécrire certaines identités obtenues avec la formule de De Moivre. Par exemple, l'identité $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ entraîne les deux identités ci-dessous :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 1 - 2\sin^2\theta,\\ \cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1.\end{aligned}$$

9 Racines n-ièmes

9.1 Racines carrées

Nous avons étudié un peu plus tôt la fonction racine carrée (voir la définition 3.3), qui à un nombre positif a associe un nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a. Il arrive souvent qu'on fasse allusion *aux* racines carrées d'un nombre a, aussi appelées racines deuxièmes. Dans ce cas, il est important de comprendre qu'on considère alors toutes les solutions de l'équation $z^2 = a$. Outre le nombre 0, qui ne possède qu'une racine carrée (à savoir 0), un nombre complexe possède exactement deux racines carrées. Voyons d'abord le cas des nombres réels.

Dans le cas où nous cherchons les racines d'un nombre réel strictement positif a, nous avons que $\sqrt{a}$ est bien défini, et on constate que $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = (-1)^2 \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Ainsi, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les deux racines carrées de a. Le fait qu'il n'y ait pas plus de deux racines carrées est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

Maintenant, dans le cas où nous cherchons les racines d'un nombre réel strictement négatif a, alors $-a > 0$ et $\sqrt{-a}$ est bien défini. On constate alors que le carré des nombres $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$ est a. Nous avons donc déterminé les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul dont la partie imaginaire est nulle. La proposition ci-dessous traite le cas d'un nombre complexe dont la partie imaginaire n'est pas nulle.

Proposition 9.1 **Racines carrées d'un nombre complexe**

Soit w un nombre complexe dont la forme cartésienne est $a + b\,\mathrm{i}$, avec $b \neq 0$. Si z est un nombre complexe, alors $z^2 = w$ si et seulement si

$$z = \pm\left(\frac{b}{\sqrt{2\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right).$$

Démonstration. Admettons encore une fois qu'un nombre ne peut posséder plus de deux racines carrées. Il nous suffit donc d'exhiber deux racines carrées pour les connaître toutes.

Posons $z = x + \mathrm{i}\ y$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Comme le carré d'un nombre réel donne toujours un nombre réel, si $b \neq 0$, il en découle que $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, d'où $y \neq 0$. On doit ainsi trouver x et y, avec $y \neq 0$, tels que $(x + \mathrm{i}\ y)^2 = a + b\,\mathrm{i}$. En égalant parties réelles et imaginaires, on obtient le système d'équations suivant :

$$x^2 - y^2 = a, \qquad (\star)$$
$$2xy = b. \qquad (\star\star)$$

Puisque $y \neq 0$, l'équation $(\star\star)$ implique que $x = \frac{b}{2y}$. En remplaçant x dans l'équation $(\star)$, et après avoir fait quelques manipulations algébriques, nous obtenons l'équation

$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0.$$

En posant $r = y^2$, nous devons maintenant résoudre l'équation $4r^2 + 4ar - b^2 = 0$. En utilisant la formule quadratique, on trouve que

$$r = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

De ces deux solutions, on doit rejeter $\frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 + b^2}\right)$. En effet, comme $b \neq 0$, $\sqrt{a^2 + b^2} > |a|$, ce qui voudrait dire que $r < 0$. Or, $r = y^2$ et y est un nombre réel. On doit donc avoir $r \geq 0$. Notons que la condition $\sqrt{a^2 + b^2} > |a|$ implique que $-a + \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, ce qui nous assure que $r = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$ est admissible pour correspondre à y^2. Ainsi, les deux valeurs possibles pour y sont données par

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}.$$

En remplaçant ces valeurs de y dans l'équation $x = \frac{b}{2y}$, on obtient que

$$x = \pm\frac{b}{\sqrt{2\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}}.$$

Cela donne lieu aux deux racines ci-dessous :

$$x + \mathrm{i}\ y = \pm\left(\frac{b}{\sqrt{2\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right).$$

□

Il est aussi possible de calculer les racines carrées d'un nombre complexe w en remarquant que si r est une racine carrée de w, alors $|r|^2 = |w|$. En effet, par définition de r, $r^2 = w$. Puis, en utilisant la proposition 3.15, on déduit que $|r|^2 = |w|$. Illustrons ce résultat par un exemple.

Exemple 9.1 **Racines carrées de $-24 + 10\,\mathrm{i}$**

Trouvez les racines carrées de $-24 + 10\,\mathrm{i}$.
Soit $x + \mathrm{i}\ y$ une racine carrée de $-24 + 10\,\mathrm{i}$. Ainsi, $(x + \mathrm{i}\ y)^2 = -24 + 10\,\mathrm{i}$, d'où $x^2 - y^2 = -24$ et $2xy = 10$. De plus, $|-24 + 10\,\mathrm{i}| = 26$. Ainsi, le carré du module de $x + \mathrm{i}\ y$ doit être 26. Cela donne lieu au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -24, && (\star)\\ 2xy &= 10, && (\star\star)\\ x^2 + y^2 &= 26. && (\star\star\star) \end{aligned}$$

En additionnant les équations $(\star)$ et $(\star\star\star)$, on trouve que $2x^2 = 2$, d'où $x = \pm 1$. En utilisant l'équation $(\star\star)$, on déduit que $y = 5$ si $x = 1$ et que $y = -5$ si $x = -1$. On vérifie finalement que $1 + 5\,\mathrm{i}$ et $-1 - 5\,\mathrm{i}$ sont les deux solutions.

9.2 Racines n-ièmes

Définition 9.1 **Racines n-ièmes**

Soit w un nombre complexe, et soit $n \in \{2, 3, 4, ...\}$. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une **racine n-ième** de w si $z^n = w$.

Dans le cas particulier où w est un nombre réel positif, l'étude du graphe de la fonction $f(x) = x^n$ (figure 9.1) nous permet de déduire que, parmi les racines n-ièmes de w, précisément une d'elles est un nombre réel positif. Si r est un nombre réel positif, sa racine n-ième positive est notée $\sqrt[n]{r}$. Cette observation est cruciale pour exprimer les racines n-ièmes d'un nombre complexe arbitraire.

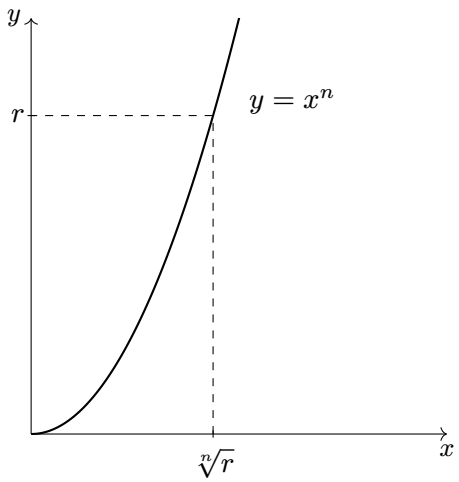


FIGURE 9.1 : Allure du graphe de la fonction x^n pour $x \geq 0$ et $n \in \{2, 3, ...\}$. Étant donné un nombre réel $r \geq 0$, il existe un unique nombre réel positif, noté $\sqrt[n]{r}$, vérifiant $\left(\sqrt[n]{r}\right)^n = r$. Cela signifie que tout nombre réel positif possède une et une seule racine n-ième appartenant aux nombres réels positifs.

Remarque 9.1 ***La* racine n-ième**

Lorsqu'on parle de *la* racine n-ième d'un nombre réel positif x, on fait allusion à l'unique nombre réel positif qui, élevé à la puissance n, donne x. Ainsi, bien qu'il existe 4 nombres complexes z vérifiant $z^4 = 16$, il est courant de dire que 2 est *la* racine quatrième de 16.

Remarque 9.2 **Formules d'addition**

Quelles que soient les valeurs de a et b, nous avons que

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b.$$

Théorème 9.2 **Valeurs des racines n-ièmes**

Soit $w \in \mathbb{C}^\star$, et soit $n \in \{2, 3, ...\}$. Notons r le module de w et θ un de ses arguments. Le nombre w possède n racines n-ièmes distinctes, ayant toutes un module de $\sqrt[n]{r}$, et dont les arguments sont égaux aux nombres

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta + 2\pi \cdot 1}{n},\ \frac{\theta + 2\pi \cdot 2}{n},\ \frac{\theta + 2\pi \cdot 3}{n},\ \dots,\ \frac{\theta + 2\pi \cdot (n-1)}{n}$$

(à un multiple de 2π près).

Démonstration. Puisque $w \in \mathbb{C}^\star$, w peut s'écrire sous forme polaire. On peut donc trouver un unique $r \in]0, \infty[$ et un $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $w = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Notons qu'il y a une infinité de possibilités pour θ. En effet, les arguments possibles pour θ forment l'ensemble de tous les nombres réels égaux à l'argument principal de w, auquel on peut ajouter des multiples de 2π.

Un nombre z vérifiant $z^n = w$ sera forcément non nul. En effet, quelle que soit la valeur de n choisie dans l'ensemble $\{2, 3, ...\}$, $0^n = 0$. Comme w est non nul, on conclut que z est lui aussi différent de 0, et peut donc s'écrire sous forme polaire. Posons $z = s\,(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$. D'après la formule de De Moivre, nous avons que

$$s^n\,(\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt)) = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,.$$

Le module du nombre complexe dans le membre de gauche de l'équation précédente est s^n et celui du membre de droite de cette même équation est r. Comme ils doivent être égaux, on en déduit que $s = \sqrt[n]{r}$. Une fois les modules simplifiés dans l'équation, on doit trouver toutes les valeurs de t telles que

$$\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

ce qui revient à identifier les valeurs de t telles que

$$\cos(nt) - \cos\theta + \mathrm{i}\,(\sin(nt) - \sin\theta) = 0.$$

Puisqu'un nombre complexe z est nul si et seulement si $|z|^2 = 0$, l'équation précédente est équivalente à

$$\cos^2(nt) - 2\cos(nt)\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2(nt) - 2\sin(nt)\sin\theta + \sin^2\theta = 0.$$

En observant que $\cos^2(nt) + \sin^2(nt) = 1$ et que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on obtient l'équation

$$1 = \cos(nt)\cos\theta + \sin(nt)\sin\theta.$$

En utilisant une formule d'addition (voir la remarque 9.2, avec $a = nt$ et $b = -\theta$), on constate que l'équation précédente est équivalente à $\cos(nt - \theta) = 1$. Comme la fonction cos prend la valeur 1 si et seulement si son argument est un multiple de 2π, on en déduit que $nt - \theta = 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, d'où

$$t = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Nous allons maintenant montrer que si k est un entier n'appartenant pas à l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, alors la valeur de t qui lui est associée est égale, à un multiple de 2π près, à une valeur de t associée à un nombre de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Un nombre

entier k peut toujours s'écrire comme $k = qn + j$, où $q \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. On a alors que

$$t = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(qn+j)\pi}{n} = \frac{\theta + 2j\pi}{n} + 2q\pi.$$

Comme ajouter un multiple de 2π à l'argument des fonctions sin et cos ne change pas leur valeur, il n'y aura pas plus de n racines, une pour chaque nombre de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Finalement, comme les n nombres de l'ensemble précédent sont associés à des valeurs de t par bonds de $\frac{2\pi}{n}$ à partir de l'angle $\frac{\theta}{n}$, en se limitant à $n-1$ bonds, nous ne pouvons pas revenir à l'angle $\frac{\theta}{n}$ sur le cercle trigonométrique. Ainsi, à chaque nombre de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ correspond une unique racine n-ième de w. Il s'agit là des seules solutions de l'équation $z^n = w$. □

Exemple 9.2 **Racines quatrièmes de 16**

Trouvez la forme cartésienne, polaire et exponentielle des racines quatrièmes de 16. Le nombre 16 s'écrit $16(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0)$ sous forme polaire. Ses racines quatrièmes auront toutes pour module $\sqrt[4]{16} = 2$. Pour trouver les arguments principaux des racines, on calcule les 4 valeurs prises par $\frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4}$ lorsque k prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. On trouve $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$ et $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$. Parmi ces arguments, seul θ_3 n'est pas dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. L'argument principal qui lui est équivalent est $\theta_3^\star = -\frac{\pi}{2}$. La table 9.1 résume les résultats.

TABLE 9.1 : Différentes formes des racines quatrièmes de 16.

Racine	Forme exponentielle	Forme polaire	Forme cartésienne
z_0	$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0}$	$2\,(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0)$	2
z_1	$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$	$2\,(\cos \frac{\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{2})$	$2\,\mathrm{i}$
z_2	$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$	$2\,(\cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi)$	-2
z_3	$2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$	$2\,(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i} \sin(-\frac{\pi}{2}))$	$-2\,\mathrm{i}$

10 Exercices — série 2

Ces exercices portent sur les formes polaire et exponentielle des nombres complexes (chapitres 6 à 9).

Exercice 10.1. Écrivez les nombres complexes ci-dessous sous forme polaire. Identifiez par la suite leur module, leur argument principal et représentez-les dans le plan complexe.

a) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$
b) $z_2 = \mathrm{i}$
c) $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $z_4 = 4$
e) $z_5 = 0$
f) $z_6 = -4$
g) $z_7 = 1 - \mathrm{i}\,\sqrt{3}$
h) $z_8 = -3 + 3\,\mathrm{i}\,\sqrt{3}$

Exercice 10.2. Donnez la forme cartésienne et la forme polaire des nombres complexes ci-dessous.

a) $(1-\mathrm{i})^{12}$
b) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^{12}}{(1-\mathrm{i})^{8}}$
c) $|4 + 5\,\mathrm{i}\,|$
d) $(1 - \mathrm{i}\,\sqrt{3})^{10} \cdot 9\,\mathrm{i}$

Exercice 10.3. Utilisez la formule de De Moivre pour démontrer les identités trigonométriques ci-dessous.

a) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
b) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
c) $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$
d) $\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\,(3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta))$

Exercice 10.4. Chuck et Norris ne s'entendent pas sur une identité trigonométrique. Chuck prétend que

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1,$$

alors que Norris affirme que

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

Qui a raison ? Justifiez.

Exercice 10.5. En vous reportant au cercle trigonométrique, déterminez la valeur exacte des quantités ci-dessous.

a) $\sin(8\pi)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
c) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
e) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
f) $\tan(8\pi)$
g) $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$
h) $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$
i) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
j) $\cos(2012\pi)$

Exercice 10.6. À partir de l'identité trigonométrique de Chuck de l'exercice 10.4, on montre facilement l'identité trigonométrique

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

En utilisant cette dernière, déterminez la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 10.7. En vous servant de ce qui a été fait à l'exercice 10.6, déterminez la valeur exacte de $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exercice 10.8. Si vous demandez à WolframAlpha de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, il vous retourne

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Or, ce n'est pas la réponse que nous avons obtenue à l'exercice 10.6. Que se passe-t-il ?

Exercice 10.9. Exprimez les racines carrées des nombres complexes ci-dessous sous forme cartésienne.

a) 16
b) -16
c) i
d) 0
e) $-24-10\,\mathrm{i}$
f) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$
g) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 10.10. Pour les valeurs de n appartenant à l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$, trouvez, sous forme cartésienne, les racines n-ièmes de l'unité et représentez-les dans le plan complexe. Pour le cas $n=5$, utilisez WolframAlpha pour évaluer les fonctions sinus et cosinus.

Solutions des exercices

Chapitre 5 – Exercices — série 1

Exercice 5.1.

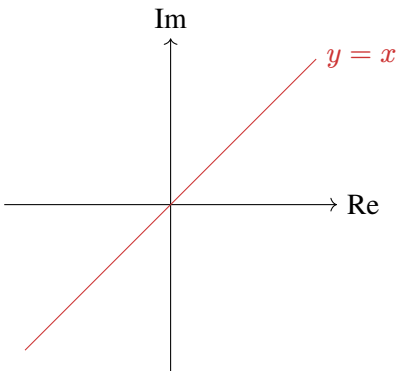
a) $5 - 3\,\mathrm{i}$
b) $\sqrt{34}$
c) $\frac{2}{25} + \frac{11}{25}\,\mathrm{i}$
d) $\frac{3}{26} - \frac{11}{26}\,\mathrm{i}$
e) $-4 - 20\,\mathrm{i}$
f) 24
g) $-\frac{2}{25} - \frac{28}{125}\,\mathrm{i}$
h) -1
i) 1331
j) $\frac{\sqrt{3649}}{11}$

Exercice 5.2.

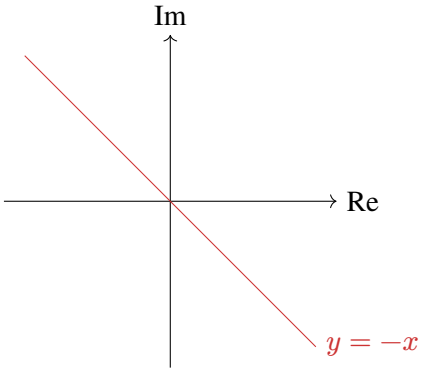
a) $z = 19 + 3\,\mathrm{i}$
b) $z = 32\,\mathrm{i}$
c) $z = -\frac{3}{2}$ ou $z = 1 - \mathrm{i}$
d) Aucune valeur de z ne satisfait cette équation.
e) $z = \frac{3}{2} + \mathrm{i}$
f) Tous les nombres complexes de module 2, soit tous ceux sur le cercle de rayon 2 centré à l'origine dans le plan complexe.
g) $z = 0$
h) $z = \pm 8$
i) On pose $z = x + y\,\mathrm{i}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on montre qu'on ne peut avoir $y \neq 0$. Le nombre z doit être un réel x. L'équation devient alors $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. Un nombre réel est égal à sa valeur absolue uniquement lorsqu'il s'agit d'un nombre réel positif. On doit donc avoir que $x^2 - 1 \in [0, \infty[$. Cela signifie que $x^2 \in [1, \infty[$, d'où $x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[=]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.
j) $z = 0$ ou $z = 5\,\mathrm{i}$

Exercice 5.3. Soit $z = x + \mathrm{i}\ y$ un nombre complexe exprimé sous sa forme cartésienne, ce qui sous-entend que x et y sont des nombres réels. Pour chacune des sous-questions, nous devons trouver des conditions à imposer aux nombres x et y qui caractérisent l'appartenance du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\ y$ à l'ensemble de nombres précisé. Ces conditions doivent pouvoir nous permettre de facilement identifier les solutions.

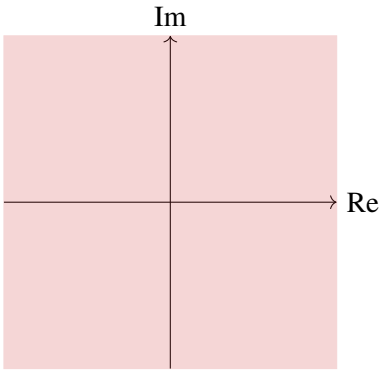
a) Puisque $z = x + \mathrm{i}\ y$, il faut et il suffit que $x = y$. Ainsi, il s'agit des points du plan complexe appartenant à la droite d'équation $y = x$.



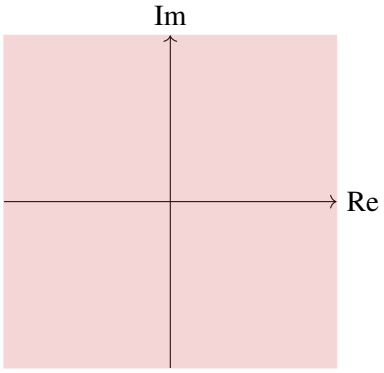
b) Nous avons que $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = x + y$. La condition revient donc à exiger que $x + y = 0$, c'est-à-dire que $y = -x$. Les nombres appartenant à l'ensemble sont donc ceux situés sur la droite d'équation $y = -x$.



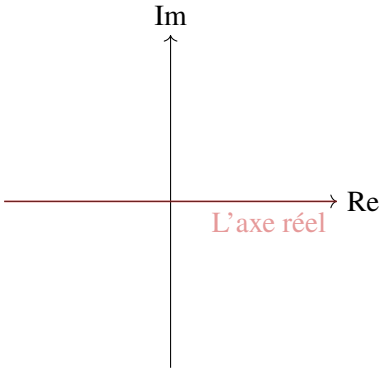
c) On a que $z + \overline{z} = 2x$. Comme $x \in \mathbb{R}$, il en est de même de $2x$. Nous avons donc que $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\mathrm{Re}(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, tous les points du plan complexe appartiennent à l'ensemble. Plus simplement, il suffit d'observer que, par définition, la partie réelle d'un nombre complexe — comme la partie imaginaire — est toujours un nombre réel.



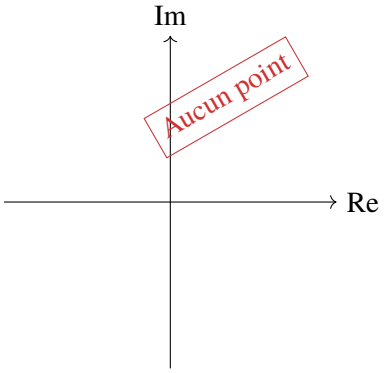
d) Par définition, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel. Par conséquent, tous les points du plan complexe appartiennent à cet ensemble.



e) En posant $z = x + \mathrm{i}\ y$, l'équation devient $2x + 2y\ \mathrm{i} = 2x$. Cette équation se simplifie pour donner $2y\ \mathrm{i} = 0$. Ainsi, les nombres appartenant à cet ensemble sont ceux dont la partie imaginaire est nulle. L'ensemble cherché est donc celui des nombres complexes situés sur l'axe réel.



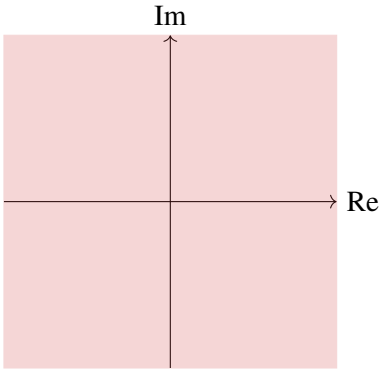
f) Par définition, $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des nombres réels. Leur somme est donc un nombre réel, quel que soit le nombre complexe z. Par conséquent, aucun nombre du plan complexe n'appartient à l'ensemble.



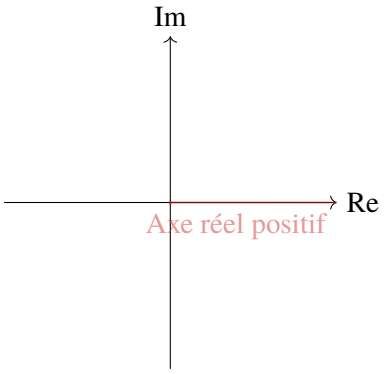
g) Si $z = x + \mathrm{i}\ y$, alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}\ y$. Ainsi, nous avons que

$$|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

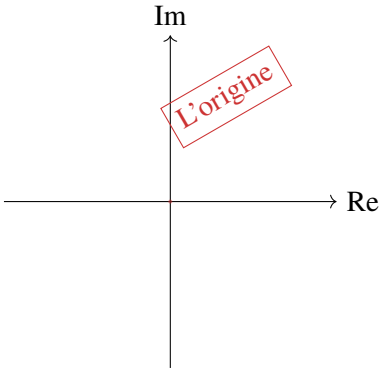
Donc tous les nombres du plan complexe appartiennent à l'ensemble.



h) D'abord, l'équation se simplifie pour donner $|z| = z$. Le membre de gauche étant un nombre réel positif, les seuls nombres complexes à pouvoir vérifier cette équation sont donc les nombres réels dans l'intervalle $[0, \infty[$. Comme tous les nombres réels positifs sont égaux à leur module, on peut affirmer qu'un nombre appartient à l'ensemble si et seulement si c'est un nombre de l'intervalle $[0, \infty[$.

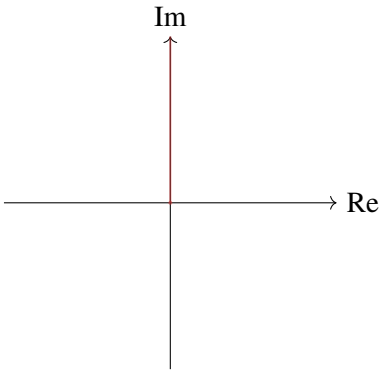


i) Si $|z+w| = |w|$ pour tout $w \in \mathbb{C}$, alors en particulier $|z+w| = |w|$ lorsque $w = 0$. Cela signifie que $|z + 0| = |0| = 0$, d'où $z = 0$. Nous venons donc de montrer que si un nombre complexe z appartient à l'ensemble, alors il est forcément égal à 0. Cela ne montre pas que 0 appartient à l'ensemble. Pour compléter, on vérifie que si $z = 0$, la condition s'écrit $|0 + w| = |w|$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. Comme cette condition est vérifiée, le seul nombre complexe qui appartient à l'ensemble est 0.



j) L'équation entraîne que $\sqrt{x^2 + y^2} = y$. Comme le membre de gauche de l'équation est un nombre réel positif, il doit en être de même du membre de droite. En élevant au carré de chaque côté, on obtient que $x^2 + y^2 = y^2$, d'où $x = 0$. Les seuls candidats possibles sont donc les nombres complexes ayant une partie réelle nulle et une partie imaginaire positive. On vérifie que si $z = y$ i, où $y \in [0, \infty[$, alors

l'équation est satisfaite. Ainsi, les nombres situés sur l'axe imaginaire au-dessus de l'axe réel (y compris l'origine) sont les seuls à appartenir à l'ensemble.



Exercice 5.4. Dans ce qui suit, nous supposerons que $z = x + \mathrm{i}\, y$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\ y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\ y_2$, où x, x_1, x_2, y, y_1 et y_2 sont des nombres réels.

a) Nous avons que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq x = \mathrm{Re}(z)$.

b) Nous avons que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| \geq y = \mathrm{Im}(z)$.

c) Nous avons que

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(x_1 + \mathrm{i}\ y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\ y_2)| \\ &= |x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)| \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2}. \end{aligned}$$

De même,

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2}.$$

La propriété est donc établie.

d) Il suffit d'appliquer la propriété c) plusieurs fois :

$$\begin{aligned} |z^n| &= \left|z^{n-1} \cdot z\right| \\ &= \left|z^{n-1}\right| \cdot |z| && \text{d'après la propriété c)} \\ &= \left|z^{n-2} \cdot z\right| \cdot |z| \\ &= \left|z^{n-2}\right| \cdot |z| \cdot |z| && \text{d'après la propriété c)} \\ &= \cdots \\ &= \underbrace{|z| \cdot |z| \cdots |z|}_{n \text{ fois}} && \text{après avoir appliqué c) suffisamment de fois} \\ &= |z|^n. \end{aligned}$$

e) Pour $z_2 \neq 0$, nous avons que

$$\begin{aligned} |z_1| &= \left|z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}\right| \\ &= |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right| && \text{d'après la propriété c).} \end{aligned}$$

En divisant chaque membre de l'équation par $|z_2|$ — ce qu'on peut faire, puisque $z_2 \neq 0$ —, on complète la démonstration.

f) Nous avons que

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + x_2 + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2)} \\ &= x_1 + x_2 - \mathrm{i}\,(y_1 + y_2) \\ &= x_1 - \mathrm{i}\ y_1 + x_2 - \mathrm{i}\ y_2 \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

g) Nous avons que

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + \mathrm{i}\ y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\ y_2)} \\ &= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (x_1 - \mathrm{i}\ y_1) \cdot (x_2 - \mathrm{i}\ y_2) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée.

h) Nous avons que

$$\begin{aligned}\overline{z^n} &= \overline{z^{n-1} \cdot z} \\ &= \overline{z^{n-1}} \cdot \overline{z} && \text{d'après la propriété g)} \\ &= \overline{z^{n-2} \cdot z} \cdot \overline{z} \\ &= \overline{z^{n-2}} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} && \text{d'après la propriété g)} \\ &= \cdots \\ &= \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdots \overline{z}}_{n \text{ fois}} && \text{en appliquant g) suffisamment de fois} \\ &= \overline{z}^{\,n}.\end{aligned}$$

i) Pour $z_2 \neq 0$, nous avons que

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= \overline{z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}} \\ &= \overline{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} && \text{d'après la propriété g).}\end{aligned}$$

En divisant chaque membre de l'équation par $\overline{z_2}$ — ce qu'on peut faire, puisque $z_2 \neq 0$ —, on complète la démonstration.

Exercice 5.5.

a) Il suffit de trouver l'équation d'une droite passant par les points de coordonnées $(-4, 1)$ et $(3, 8)$. Dans un premier temps, on trouve que la pente de la droite est de 1. Puis, en posant $y = x + b$, on trouve que $b = 5$, d'où $y = x + 5$.

b) Pour que les trois points soient alignés, il faut et il suffit que z_3 appartienne à la droite passant par les points z_1 et z_2. Ainsi, l'équation $y = x + 5$ doit être satisfaite lorsque $x = 20$ et $y = 24$. Comme ce n'est pas le cas, les trois points ne sont pas alignés.

Exercice 5.6. La solution est présentée dans cette vidéo.

Nombres complexes : un lieu et deux équations

Exercice 5.7.

a) On pose $z = x + \mathrm{i}\ y$. En égalant les parties réelle et imaginaire de chacun des deux membres de l'équation, on trouve que $y = 10 - 2x$. Il s'agit donc de la droite d'équation $y = 10 - 2x$.

b) Il s'agit des nombres réels positifs.

c) La solution est présentée dans cette vidéo.

Ellipse dans le plan complexe : cas habituel

d) La solution est présentée dans cette vidéo.

Ellipse dans le plan complexe : cas limite

e) Une ellipse de foyers $1 + \mathrm{i}$ et $-1 - \mathrm{i}$, centrée à l'origine, de grand axe 10 et de petit axe $2\sqrt{23}$.

f) La solution est présentée dans cette vidéo.

Hyperbole dans le plan complexe : cas habituel

g) La solution est présentée dans cette vidéo.

Hyperbole dans le plan complexe : une seule branche

h) La solution est présentée dans cette vidéo.

Hyperbole dans le plan complexe : cas limite

i) L'équation est équivalente à $|z - 2| = |z + 2|$. Les points doivent être à une même distance de 2 et de -2. Ce sont les points situés sur la droite perpendiculaire au segment qui les joint et qui passe par le milieu de celui-ci (la médiatrice du segment). Dans ce cas particulier, cela correspond à l'axe imaginaire.

j) Pour que le produit $|z - 2|z\overline{z}$ soit nul, il faut qu'au moins un des facteurs soit nul. Le facteur $|z - 2|$ s'annule si et seulement si $z = 2$. De même, $z = 0 \iff \overline{z} = 0$. Ainsi, les seules solutions sont 0 et 2.

k) En posant $z = x + \mathrm{i}\ y$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on trouve que $z = -\frac{1}{4} - 8\,\mathrm{i}$.

l) En posant $z = x + \mathrm{i}\ y$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on trouve que $y = x^2$. Ainsi, l'ensemble solution est composé de tous les $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels on peut trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = x + x^2\ \mathrm{i}$: c'est la parabole d'équation $y = x^2$.

Chapitre 10 – Exercices — série 2

Exercice 10.1. Pour trouver le module d'un nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$, où $a, b \in \mathbb{R}$, nous utilisons la définition, c'est-à-dire que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pour trouver l'argument principal, on trouve d'abord un de ses arguments, puis, au besoin, on ajoute (ou soustrait) à ce nombre un multiple de 2π approprié pour avoir un nombre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Lorsque ces nombres sont déterminés, on est en mesure d'écrire la forme polaire. C'est ainsi qu'on obtient :

a) module : $\sqrt{2}$; argument principal : $\frac{\pi}{4}$; forme polaire : $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

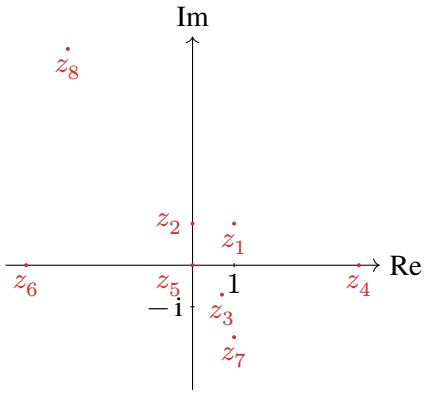
b) module : 1 ; argument principal : $\frac{\pi}{2}$; forme polaire : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) module : 1 ; argument principal : $-\frac{\pi}{4}$; forme polaire : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

d) module : 4 ; argument principal : 0 ; forme polaire : $4\,(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$.

e) module : 0 ; argument principal : indéfini ; forme polaire : indéfinie.
f) module : 4 ; argument principal : π ; forme polaire : $4\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$.
g) module : 2 ; argument principal : $-\frac{\pi}{3}$; forme polaire : $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
h) module : 6 ; argument principal : $\frac{2\pi}{3}$; forme polaire : $6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Voici la représentation dans le plan complexe des nombres dont il est question dans cet exercice.



Exercice 10.2.

a) Nous avons que $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Ainsi, le module du nombre $(1-\mathrm{i})^{12}$ sera $(\sqrt{2})^{12} = 2^6$, et un de ses arguments est $-\frac{\pi}{4}\cdot 12 = -3\pi$. L'argument principal est donc π. Cela nous permet finalement d'écrire

$$(1-\mathrm{i})^{12} = \underbrace{2^6(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)}_{\text{forme polaire}} = \underbrace{-2^6}_{\text{forme cartésienne}}.$$

b) À partir de la forme polaire de $1-\mathrm{i}$ et $1+\mathrm{i}$, on trouve que $(1+\mathrm{i})^{12} = -2^6$ et $(1-\mathrm{i})^8 = 2^4$. Ainsi,

$$\frac{(1+\mathrm{i})^{12}}{(1-\mathrm{i})^8} = \frac{-2^6}{2^4} = \underbrace{-4}_{\text{forme cartésienne}} = \underbrace{4(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)}_{\text{forme polaire}}.$$

c) Remarquons d'abord que $|4+5\,\mathrm{i}\,| = \sqrt{41}$. Le nombre est donc situé sur la partie de l'axe réel où les nombres sont positifs, de telle sorte que son argument est 0. Aussi, comme la notion de module pour les nombres complexes se confond avec celle de valeur absolue dans le cas des nombres réels, on en déduit que le module du nombre considéré est $\sqrt{41}$. Ainsi, la forme cartésienne est $\sqrt{41}$, et la forme polaire, $\sqrt{41}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$.

d) Le nombre $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ a pour module 2 et pour argument principal $-\frac{\pi}{3}$. Ainsi, $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$ a pour module 2^{10} et $\frac{2\pi}{3}$ comme argument principal. De même, le nombre $9\,\mathrm{i}$ a pour module 9 et pour argument principal $\frac{\pi}{2}$. Le produit de ces deux nombres est donc le nombre complexe ayant pour module $2^{10}\cdot 9 = 9216$, et pour argument $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$, qui est égal à $-\frac{5\pi}{6}$ à un multiple de 2π près. Ainsi,

$$(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}\cdot 9\,\mathrm{i} = \underbrace{9216\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}_{\text{forme polaire}}$$
$$= \underbrace{-4608\sqrt{3} - 4608\,\mathrm{i}}_{\text{forme cartésienne}}.$$

Exercice 10.3. D'après la formule de De Moivre, nous avons que

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta.$$

Comme $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + \mathrm{i}(2\sin\theta\cos\theta)$, on en déduit que

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + \mathrm{i}(2\sin\theta\cos\theta) = \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta.$$

Puis, en égalant parties réelle et imaginaire, nous obtenons les identités a) et b).

Pour l'identité c), il suffit d'observer que puisque $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, alors $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. En isolant $\cos^2\theta$ dans la dernière expression, on obtient le résultat cherché.

En élevant au carré l'identité c), on obtient que

$$\cos^4\theta = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right).$$

Aussi, en remplaçant θ par 2θ dans l'identité c), on trouve que

$$\cos^2 2\theta = \frac{1 + \cos 4\theta}{2}.$$

Cette dernière expression, lorsqu'on la remplace dans la première, nous donne l'identité cherchée. On peut aussi utiliser la formule de De Moivre pour $n = 4$.

Exercice 10.4. Chuck et Norris ont tous les deux raison. En effet, en considérant l'identité

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta),$$

qui a été démontrée à l'exercice 10.3, de même que l'identité fondamentale

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

on obtient que $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$. En substituant l'expression pour $\cos^2(\theta)$ dans l'équation $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, on obtient la version de Norris. En substituant l'expression pour $\sin^2(\theta)$, on obtient celle de Chuck.

Exercice 10.5.

a) $\sin(8\pi) = 0$
b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
c) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
e) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
f) $\tan(8\pi) = 0$
g) $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est une expression qui n'est pas définie.
h) $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$
i) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
j) $\cos(2012\pi) = 1$

Exercice 10.6. Si nous posons $\theta = \frac{\pi}{12}$ dans l'identité et qu'on utilise le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient l'équation

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Comme l'angle $\frac{\pi}{12}$ se situe dans le premier quadrant, nous avons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, d'où la réponse :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Exercice 10.7. Remarquons dans un premier temps que $\sin\frac{13\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12}$. Pour s'en convaincre, il suffit de se référer au cercle trigonométrique. Ensuite, en se basant sur l'identité fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, nous avons que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, il suit que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. De cela, nous pouvons conclure que $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 10.8. Les nombres peuvent s'écrire de plusieurs façons. Par exemple, $\frac{14}{2}$ est le même nombre que 7, et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est le même que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou encore $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Pour montrer que nous et WolframAlpha avons raison concernant la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, il nous faut établir l'égalité ci-dessous :

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Les deux membres étant positifs, ils seront égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux. Il nous faut donc montrer que

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{8},$$

égalité qui est bien sûr vérifiée. Notons que si vous avez utilisé votre calculatrice pour obtenir une approximation des deux nombres et pensez avoir montré que ceux-ci étaient forcément égaux, eh bien, vous êtes dans l'erreur. Un tel raisonnement nous amènerait à croire que $3{,}1415927 = 3{,}1415927000001$, ce qui n'est bien sûr pas le cas.

Exercice 10.9.

a) Les deux racines sont -4 et 4.

b) Les deux racines sont $-4\,\mathrm{i}$ et $4\,\mathrm{i}$.

c) On veut trouver $z = x + \mathrm{i}\,y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $z^2 = \mathrm{i}$. Ainsi, on doit avoir que $x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i} = \mathrm{i}$. En égalant parties réelle et imaginaire, on obtient les deux équations $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 1$. La première de ces équations implique que $x = y$ ou $x = -y$. Si $x = y$, en remplaçant dans la deuxième équation, on trouve que $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $x = -y$, alors $-2x^2 = 1$, ce qui est impossible puisque $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, les deux racines carrées de i sont

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) Rappelons d'abord que le produit de deux termes est nul si et seulement si au moins un des termes est nul. Ainsi, affirmer que z est une racine carrée de 0 signifie que $z \cdot z = 0$, ce qui n'est le cas que lorsque $z = 0$. Par conséquent, le nombre 0 n'a qu'une seule racine carrée, à savoir 0.

e) On veut trouver $z = x + \mathrm{i}\ y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $z^2 = -24 - 10\,\mathrm{i}$. Ainsi, on doit avoir que $x^2 - y^2 + 2xy\ \mathrm{i} = -24 - 10\,\mathrm{i}$. En égalant parties réelle et imaginaire, on obtient les deux équations $x^2 - y^2 = -24$ et $2xy = -10$. Puisque le carré d'un nombre réel donne un nombre réel, il suit que $y \neq 0$. Cela nous permet de diviser par y et d'écrire $x = -\frac{5}{y}$. En remplaçant dans l'équation $x^2 - y^2 = -24$, nous obtenons que

$$\frac{25}{y^2} - y^2 = -24.$$

Cela nous amène à résoudre l'équation $y^4 - 24y^2 - 25 = 0$. On peut y arriver en posant $u = y^2$. On obtient ainsi l'équation quadratique $u^2 - 24u - 25 = 0$, dont les solutions sont 25 et -1. Comme u est le carré de y, un nombre réel, on doit rejeter la solution $u = -1$. Par conséquent, $y^2 = 25$, d'où $y = \pm 5$. Si $y = 5$, alors $x = -1$, et si $y = -5$, alors $x = 1$. Par conséquent, les deux racines sont $z_1 = -1 + 5\,\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - 5\,\mathrm{i}$.

f) Soit θ l'argument principal du nombre $\sqrt{3} + \mathrm{i}$. On observe que $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ est situé dans le premier quadrant, et que $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Par conséquent, $\theta = \frac{\pi}{6}$. Comme le module de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ est 2, sa forme polaire est donnée par $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Ainsi, les deux racines carrées de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ sont

$$z_k = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)\right),$$

où $k \in \{0, 1\}$. Cela donne lieu aux racines

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

g) Nous avons que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. C'est un nombre réel positif ; il possède donc deux racines carrées, à savoir

$$z_1 = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3},$$
$$z_2 = -\sqrt{\sqrt{3}} = -\sqrt[4]{3}.$$

Exercice 10.10. **Cas où $n = 1$.** Il faut résoudre $z^1 = 1$, ce qui implique que $z_0 = 1$ est l'unique racine première de l'unité.

Cas où $n = 2$. Il faut résoudre $z^2 = 1$, ce qui implique que $z^2 - 1 = 0$, ou encore $(z-1)(z+1) = 0$. Les deux solutions sont donc $z_0 = 1$ et $z_1 = -1$.

Cas où $n \geq 3$. Il est plus simple de passer par la forme polaire ou exponentielle. En effet, si $w = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors les n racines n-ièmes de w sont données par

$$z_k = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dans cet exercice, on s'intéresse aux racines de l'unité, c'est-à-dire aux solutions de l'équation $z^n = 1$ pour différentes valeurs de n. Sous forme polaire, le nombre 1 s'écrit $1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$. Le module des racines n-ièmes sera donc 1, quelle que soit la valeur de n. Ce qui va changer, en fonction de n, ce sont les arguments des racines.

Pour $n = 3$, les trois arguments sont $\frac{0+2k\pi}{n}$, où $k \in \{0, 1, 2\}$, ce qui nous donne les arguments (pas nécessairement principaux) 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0) = 1, \\
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_2 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 4$, les quatre arguments sont $\frac{0+2k\pi}{n}$, où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, ce qui nous donne les arguments (pas nécessairement principaux) 0, $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0) = 1, \\
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}, \\
z_2 &= 1 \cdot (\cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi) = -1, \\
z_3 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Pour $n = 5$, les cinq arguments sont $\frac{0+2k\pi}{n}$, où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ce qui nous donne les arguments (pas nécessairement principaux) 0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0) = 1, \\
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) + \mathrm{i} \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}, \\
z_2 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{5} + \mathrm{i} \sin \frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) + \mathrm{i} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}, \\
z_3 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{6\pi}{5} + \mathrm{i} \sin \frac{6\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) - \mathrm{i} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}, \\
z_4 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{8\pi}{5} + \mathrm{i} \sin \frac{8\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) - \mathrm{i} \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}.
\end{aligned}$$

Ici, il n'est pas simple de déterminer la valeur exacte du sinus et du cosinus de la plupart des arguments. On peut facilement y parvenir à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique comme Maple, ou encore de WolframAlpha. Voici comment on peut déterminer ces quantités avec WolframAlpha.

Pour $n = 6$, les six arguments sont $\frac{0+2k\pi}{n}$, où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, ce qui nous donne les arguments (pas nécessairement principaux) 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0) = 1, \\
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_2 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_3 &= 1 \cdot (\cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi) = -1, \\
z_4 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z_5 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[Neu23] John von Neumann. “Zur Einführung der transfiniten Zahlen”. In : *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 1.4 (1923), p. 199-208.

[Rit06] Benoît Rittaud. *Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$. Éditions le Pommier, 2006.